GEOMETRÍA Y MATEMÁTICAS

* OPERACIONES MATEMÁTICAS
* PROPORCIONALIDAD.

OPERACIONES CON SEGMENTOS

- SUMA
- RESTA
- MULTIPLICACIÓN (x un nº)
- DIVISIÓN (x un nº)

- POTENCIA
- MEDIA PROPORCIONAL
- TERCERA PROPORCIONAL
- CUARTA PROPORCIONAL

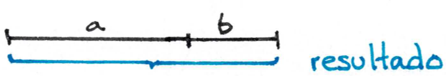
APLICACIONES

- MULTIPLICACIÓN de segmentos
- DIVISIÓN de segmentos
- RAIZ CUADRADA

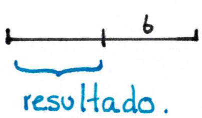
* SUMA / RESTA

Dados 2 segmentos a y b

$a+b$



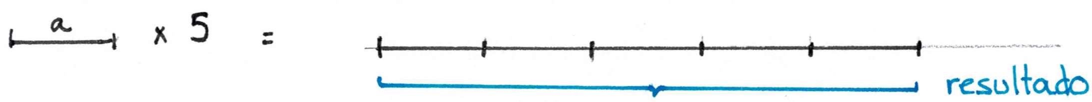
$a-b$



* MULTIPLICACIÓN

Dado el segmento a multiplicarlo por cualquier nº entero supone alinear el segmento repetidas veces tantas como indique el multiplicador.

En caso de que el nº tenga decimales se realizará la división del último segmento en partes proporcionales.

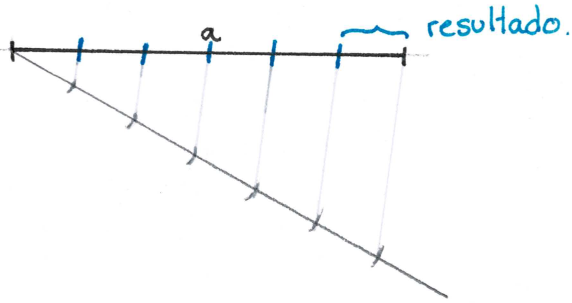


* DIVISIÓN

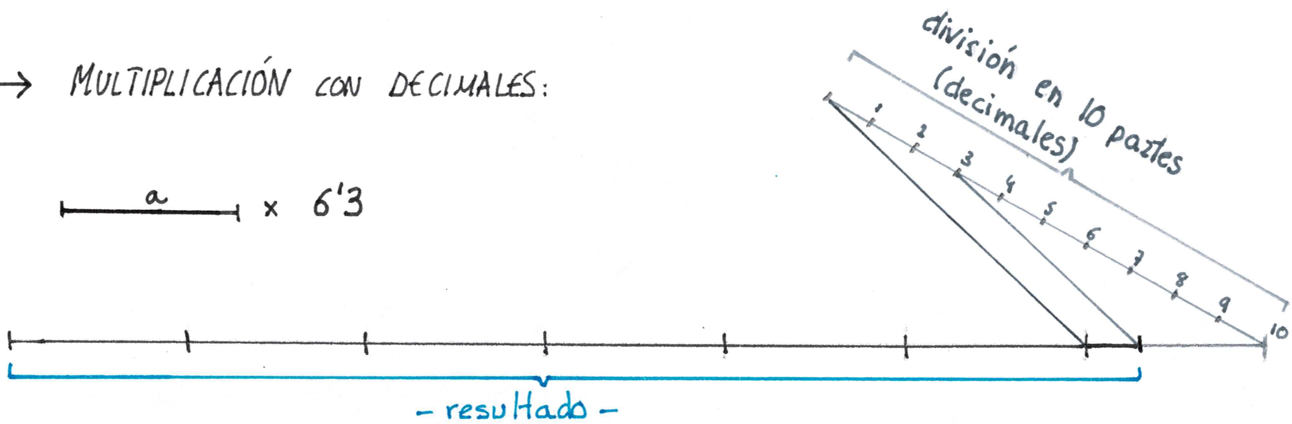
Dado el segmento a dividirlo supone fraccionarlo en partes iguales. El nº de partes las indica el divisor.

Para ello aplicaremos el <u>Teorema de Thales.</u>

$\frac{a}{6}$



↳ MULTIPLICACIÓN CON DECIMALES:



TEOREMA de THALES:

Si dos rectas cualquiera son seccionadas por rectas paralelas, los segmentos resultantes de la primera recta son proporcionales a los segmentos resultantes correspondientes de la segunda.

* POTENCIA

En matemáticas: La potencia de un número es multiplicar ese número por sí mismo las veces que indique el exponente.

$$3^2 = 9$$

EXPONENTE
POTENCIA
BASE

→ la operación inversa a la potencia es la raíz

La potencia (elevado al cuadrado) es la inversa de la raíz cuadrada

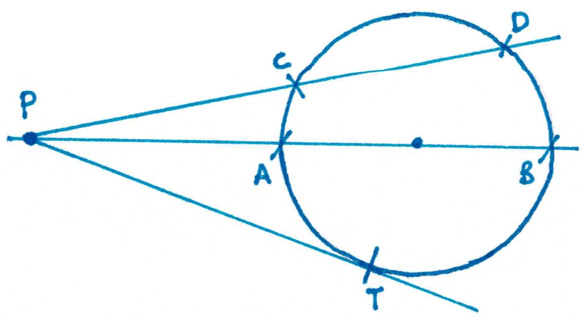
n^2 vs $\sqrt[2]{n}$

ese índice 2 no se indica.

$$\sqrt[2]{25} = 5$$

ÍNDICE
RADICANDO (el símbolo)
RAIZ
CANTIDAD SUBRADICAL

En dibujo: La POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA es un valor constante resultado de multiplicar la longitud de dos segmentos situados sobre una misma recta y con un mismo origen (P) que cortan o son tangentes a la circunferencia dada.



¿Y eso qué quiere decir?

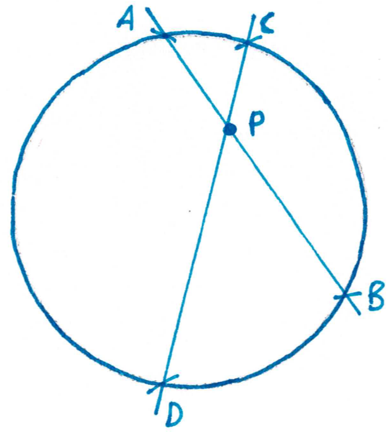
Que $PC \times PD$ es igual que $PA \times PB$ y es igual que $PT \times PT$.

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PT^2 = K$$

El resultado es un valor (el que sea) pero siempre el mismo = constante

Si el punto P está dentro de la circunferencia la potencia (ese valor constante) será negativa:

* En este caso, no puede haber una recta tangente:



Si las rectas son RECTAS ORIENTADAS

(eso quiere decir que tienen dirección y sentido)

Y P suponemos valor 0, por ejemplo el segmento PA será negativo y el PB positivo.

$+ \times - = -$
más × menos = menos

LA MULTIPLICACIÓN DE AMBOS

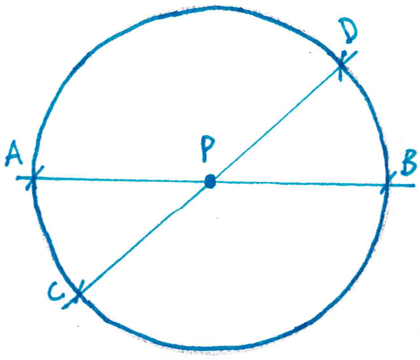
$-PA \times PB = -K \rightarrow$ la constante será negativa

$$-PA \cdot PB = -PC \cdot PD = -K$$

* En caso de que el punto sea coincidente con el centro las medidas de los segmentos secantes siempre serán iguales. (siempre el radio)

$-PA \cdot PB = -PC \cdot PD = -K$

$PA = PB = PC = PD$



$$-PA \cdot PA = -K$$

ojo! No es $-PA^2$ porque $\boxed{- \times - = +}$

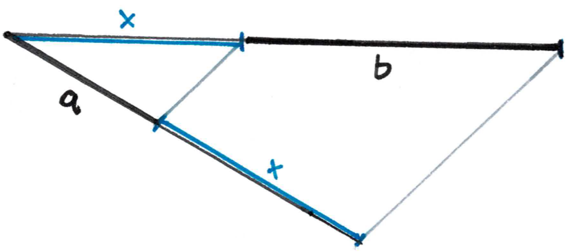
* $\boxed{\text{MEDIA PROPORCIONAL}}$ entre dos segmentos:

La media proporcional es una relación de proporcionalidad entre 3 segmentos.

El segmento a es al segmento x
lo que x es al segmento b.

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

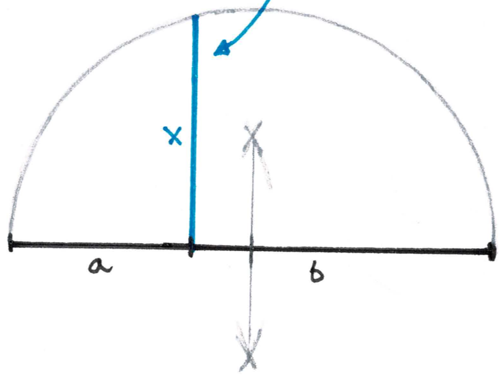
ESTO SE PODRÍA SOLUCIONAR
POR TALES, pero no se puede dado que el valor x es la incognita



ENTONCES ¿cómo?

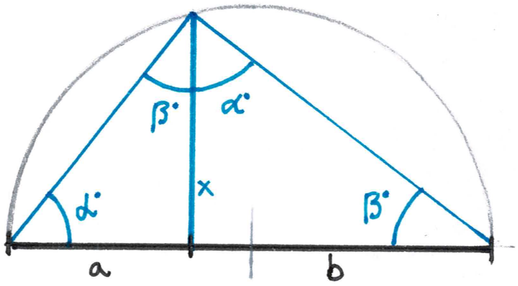
Utilizando la suma de segmentos
+ el arco capaz de 90°

resultado



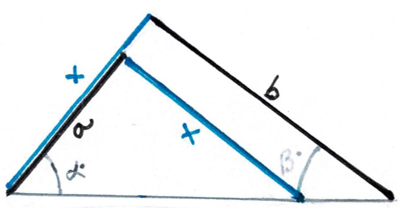
PERO ¿POR QUÉ?

Porque el arco capaz de 90°
hace que cualquier triángulo
dibujado desde los extremos y con
el tercer vértice sobre el arco sea
de 90° → TRIÁNGULO RECTÁNGULO



Al subdividir este triángulo
en 2 también rectángulos,
los ángulos son complementarios.

Y los triángulos semejantes

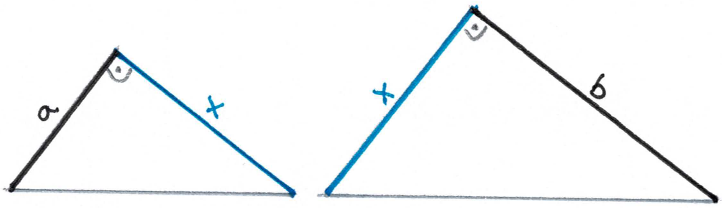


$\alpha° + \beta° = 90°$ (COMPLEMENTARIOS)

Igual que Tales! Ahh vale... :)

ENTONCES:

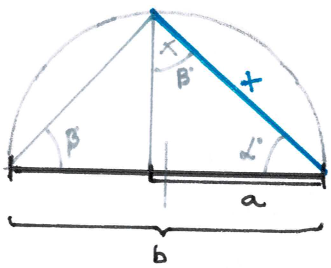
Después de entender que se forman dos TRIÁNGULOS SEMEJANTES



PODEMOS ENTENDER LA

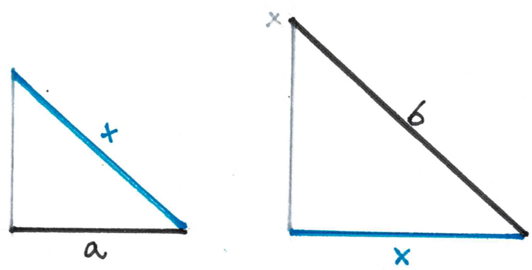
2ª FORMA DE TRAZAR
LA MEDIA PROPORCIONAL

¿CÓMO? Utilizando en vez de la suma de los segmentos, la resta o superposición + arco capaz de 90°



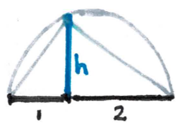
Se mantiene la proporcionalidad:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$



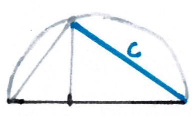
Y ASÍ HEMOS UTILIZADO LOS DOS TEOREMAS FUNDAMENTALES:

- TEOREMA DE LA ALTURA



Es la relación de proporcionalidad entre las longitudes en un triángulo rectángulo de: la altura perpendicular a la hipotenusa y los dos segmentos en los que divide a esta.

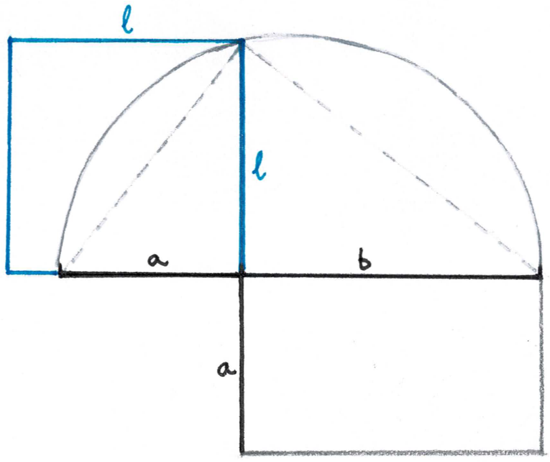
- TEOREMA DEL CATETO



Es la relación de proporcionalidad entre las longitudes en un triángulo rectángulo de: el cateto respecto la hipotenusa, que es a su vez hipotenusa de un subrectángulo generado a partir de la división del pie de la altura sobre la hipotenusa principal.

TEOREMA DE LA ALTURA:

Además de ser media proporcional o geométrica también sirve para demostrar la EQUIVALENCIA DE ÁREAS de rectángulo a cuadrado.



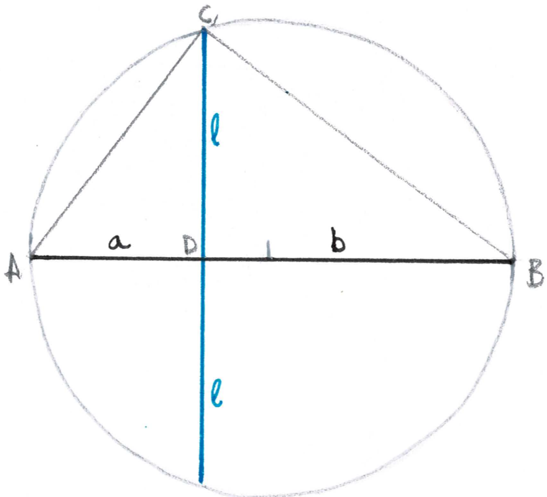
Área rectángulo: $a \times b$

Área cuadrado: $l \times l = l^2$

$$a \cdot b = l^2$$

VALE, PERO ¿POR QUÉ?

Porque el producto de $a \cdot b$ y $l \cdot l$ es constante.



Sabiendo que los triángulos $\widehat{ABC} \backsim \widehat{BCD} \backsim \widehat{ACD}$ son semejantes

$$\frac{a}{l} = \frac{l}{b} \quad \{\text{media proporcional}\}$$

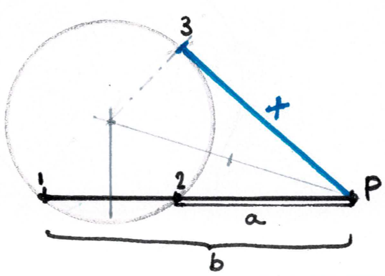
$$\Downarrow$$

$$l^2 = a \cdot b.$$

TACHÁN!!

PERO TAMBIÉN SE PUEDE RESOLVER $\boxed{\text{LA MEDIA PROPORCIONAL POR POTENCIAS}}$ ¿¿Qué me dices??

Colocamos los segmentos superpuestos + potencias



Trazamos una circunferencia cualquiera que pase por 1 y 2. Encontramos tangencia. 3

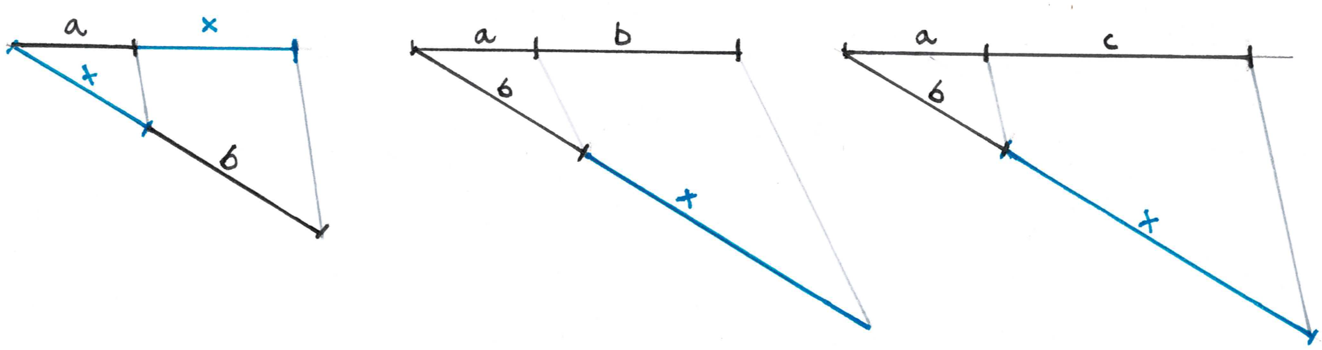
$$a \cdot b = x^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

* MEDIA , TERCERA y CUARTA PROPORCIONAL:

Todas se basan en la proporcionalidad (Tales). La media proporcional supone un problema en sí mismo porque no podemos completar Tales sin saber la incógnita. PERO LA TERCERA Y CUARTA proporcional no tienen este problema.

	MEDIA PROPORCIONAL	TERCERA PROPORCIONAL	CUARTA PROPORCIONAL
DATOS:	a, b	a, b	a, b, c
	$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$	$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

sólo 1 incognita
(regla de tres del montón)



↳ POSIBLES PROBLEMAS

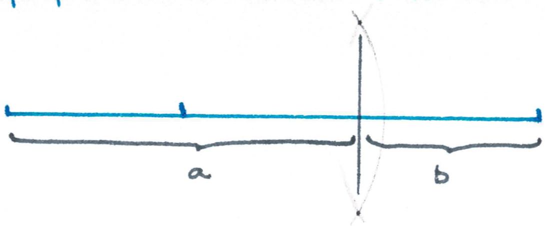
1. Hallar dos segmentos conocida su suma y su resta.
2. Hallar dos segmentos conocida su suma y su media proporcional.
3. Hallar dos segmentos conocida su resta y su media proporcional
4. Dividir un segmento en media y extrema razón (Φ)
5. Multiplicar / Dividir dos segmentos entre sí.
6. Hallar la raiz cuadrada de un segmento dado.

PROBLEMAS

1. Encuentra los segmentos a y b, sabiendo que su suma mide 70 mm y su resta (o diferencia) es de 23 mm.

suma   resta

SOLUCIÓN: superposición de ambos + mediatriz del resto.



Prueba con números ¿cómo lo harías?

Suma 70 - Resta 23

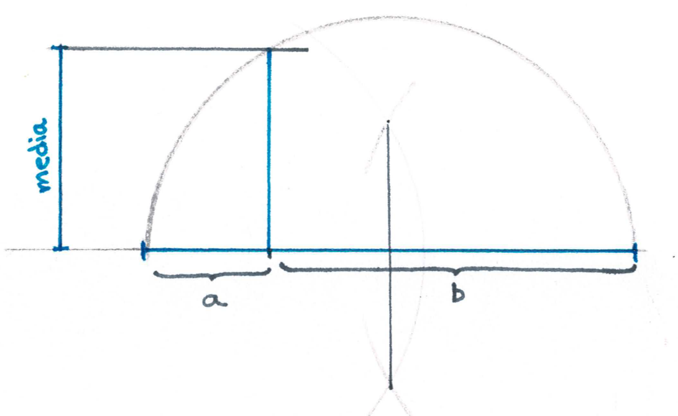
Diferencia entre 70 y 23 = 47 $\longrightarrow$ $47/2 = 23'5$

El segmento a $23 + 23'5 = 46'5$, el segmento b $= 23'5$.

2. Hallar los segmentos a y b, conocida la suma de ambos y su media proporcional.

suma   media

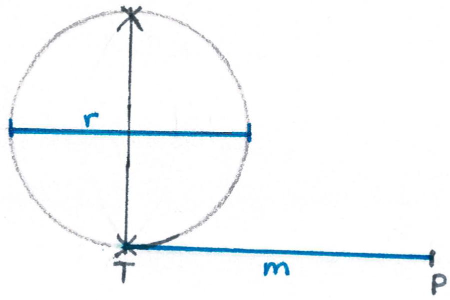
SOLUCIÓN: arco capaz de 90° a partir de la suma y encontrar posición $\perp$ para la media proporcional.

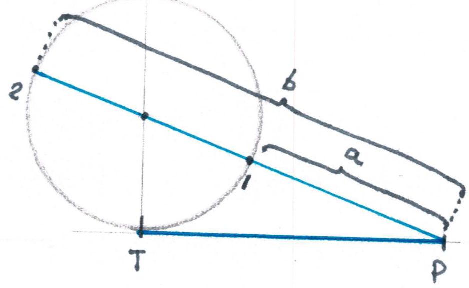


③ Hallar dos segmentos a y b, conociendo su diferencia y su media proporcional.

resta media

SOLUCIÓN: Por potencias. Circunferencia de Ø la resta y tangente la media





$$\begin{cases} a \cdot b = m^2 \\ b - a = r \end{cases}$$

④ Divide el segmento a en dos subsegmentos media y extrema razón.

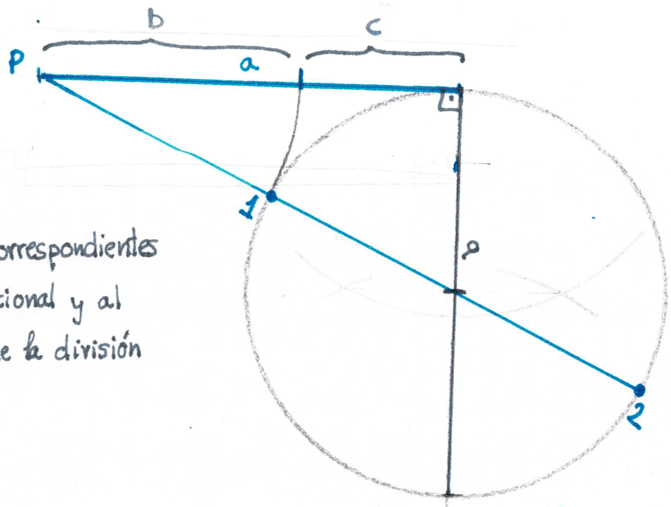
a

↓ Y esto ¿Qué significa?

* Tenemos que dividir un segmento de forma que ambas divisiones y el segmento principal sean proporcionales.

O lo que es lo mismo: DIVISIÓN AÚREA DE UN SEGMENTO.

SOLUCIÓN: Por potencias. Colocamos el segmento dado como tangente a la circunferencia del mismo Ø que el segmento.



La división aurea genera 2 partes correspondientes a la media proporcional y al extremo pequeño de la división

$$\overline{P1} \cdot \overline{P2} = \bar{a}^2$$

$$b \cdot (b + a) = a^2$$

$$b^2 + ab = a^2$$

— dividimos todo para a

$$\frac{b^2}{a} + \frac{ab}{a} = \frac{a^2}{a}$$

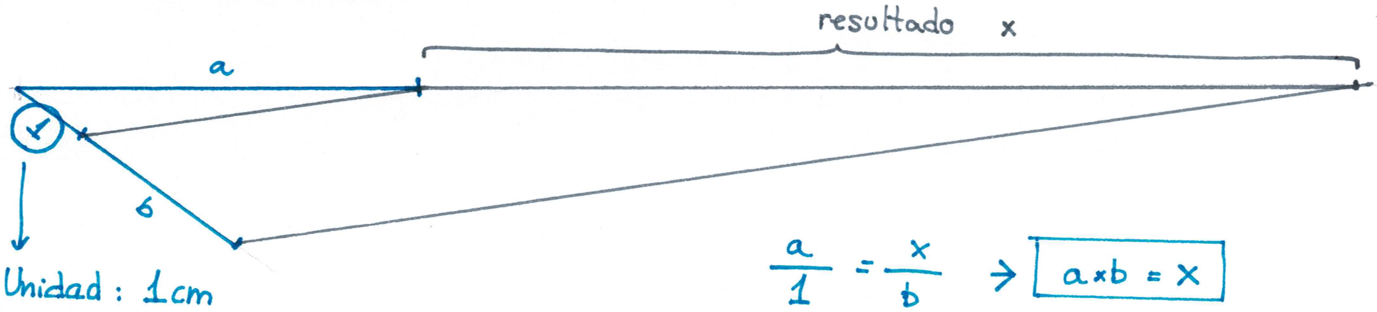
$$a = \frac{b^2}{a} + b \rightarrow \frac{b^2}{a} = \underbrace{(a-b)}_{=c}$$

MEDIA PROPORCIONAL → YUJU!! ← $\boxed{\frac{b}{a} = \frac{c}{b}}$

5. Encuentra el producto y la división de los segmentos a y b.

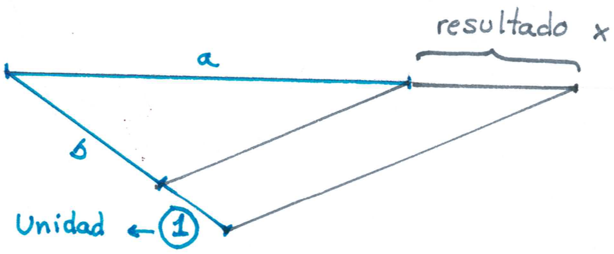
SOLUCIÓN: Por Tales → aplicación de la cuarta proporcional.

MULTIPLICACIÓN



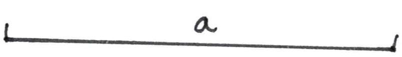
$$\frac{a}{1} = \frac{x}{b} \rightarrow \boxed{a \times b = x}$$

DIVISIÓN

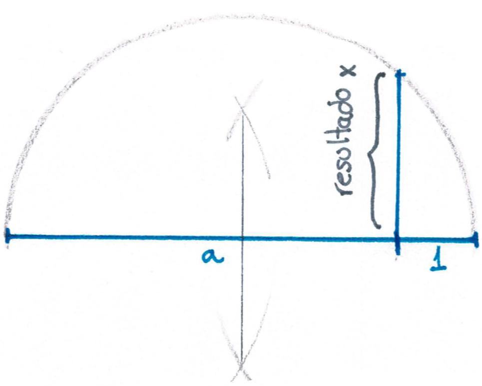


$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1} \rightarrow \boxed{a/b = x}$$

6. Representa la raiz cuadrada del segmento a.



SOLUCIÓN: Mediante la media proporcional del segmento a + 1 (unidad)



$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1}$$

$$a = x^2 \longrightarrow \boxed{x = \sqrt{a}}$$