DOVELA academia

TEMA 38· Tangencias y enlaces. Aplicaciones.

Autora: Iria Senra Álvarez

ESQUEMA/ ESTRUCTURA TEMA 38

1. INTRODUCCIÓN

La palabra **geometría** viene de las griegas "geo" =tierra y "metron" =medida, es decir, "medida de la tierra". Y es que precisamente **su estudio surge de la necesidad de egipcios y babilonios de medir y controlar las tierras de cultivo y herencias.** Aun así, fueron los **griegos** como Tales de Mileto, Pitágoras o Euclides, entre otros, los que realmente profundizaron en la **sistematización de su estudio** desde un punto de vista científico y matemático tal y como hoy la entendemos. Sentaron las bases de la geometría plana elemental que se usaría durante siglos hasta nuestros días.

Aunque en sus inicios esta disciplina obedecía, como su nombre lo indica, a la medición en su sentido pragmático, con el paso del tiempo la humanidad comprendió que incluso las abstracciones y representaciones más complejas pueden ser expresadas en términos geométricos. Todas las ramas de estudios científicos, desde las matemáticas más básicas hasta la física más compleja, se pueden acabar asimilando y expresando en términos geométricos y espaciales. Pero también resulta fundamental en temas más creativos como el arte, tanto plástica, como volumétrica, arquitectónica o incluso musical. Por ello es fundamental que nuestro alumnado conozca y maneje con fluidez los términos y los conceptos asociados a la geometría desde lo más básico.

Durante el desarrollo de este tema nos centraremos en ahondar en el concepto de tangencia. Partiremos de definir **qué entendemos como tangencia** para luego explicar sus **propiedades básicas y conceptos como lugares geométricos** que serán fundamentales para resolver los ejercicios más sencillos de tangencias. Luego pasaremos explicar **herramientas más complejas** como la dilatación, la homotecia, la inversión o la potencia. Si bien debemos aclarar que algunos de ellos (homotecia, inversión y potencia) se desarrollan extensamente en otros temas de la oposición y, aqueu trataremos de explicarlas desde una base general que nos haga comprender esta aplicación, no podremos pararnos en detalles que debemos dar por conocidos.

2. CONCEPTO DE TANGENCIA

2.1. DEFINICIÓN Y POSICIONES RELATIVAS

Llamamos **tangencias** a las posiciones límite entre rectas y circunferencias o entre circunferencias, cuando los puntos de intersección se aproximan indefinidamente y, por lo tanto, la distancia entre ellos tiende a cero. Se dice entonces que tienen un solo punto en común que llamamos **punto de tangencia** (T) (Fig. 01A)

Cuando se cortan en dos puntos se dicen que son **secantes** (Fig. 01B) y si no se cortan se dice que son **exteriores** (Fig. 01B) y en el caso de las circunferencias también podría ser **interior.**

Es muy importante aclarar que para que un ejercicio de tangencias este correctamente definido **debemos indicar siempre claros y concisos los puntos de tangencia** mediante intersecciones entre rectas o entre recta y circunferencia en el punto exacto. No es suficiente con dibujar las circunferencias o rectas tangentes.

2.2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

Existen **cuatro propiedades básicas** que se cumplen en toda tangencia y que serán en muchos casos la base para poder determinarlas ya que nos permitirán dibujar el haz de centros, es decir la recta sobre la que seguro se va a encontrar el centro de la o las circunferencias solución al problema.

1. La primera propiedad dice que, si dos circunferencias son tangentes entre sí, el punto de tangencia estará alineado con sus centros (O_1 O_2) (Fig. 02) y por tanto el segmento que une sus centros será igual a la suma de los segmentos definidos por estos y el punto de tangencia.
2. La segunda se refiere a que si una recta es tangente a una circunferencia el punto de tangencia T coincidirá con el radio de la circunferencia que forma 90° con la recta (Fig. 03)
3. La tercera propiedad dice que, si una circunferencia pasa por dos puntos AB, su centro estará en la mediatriz del segmento definido por estos, que son una cuerda de la misma. (Fig. 04)
4. Por último, la cuarta propiedad relevante dice que si una circunferencia es tangente a dos rectas su centro estará en la bisectriz del ángulo que forman dichas rectas (Fig. 05)

2.3. LUGARES GEOMÉTRICOS

Un **lugar geométrico** es un conjunto de puntos que cumplen unas circunstancias o propiedades comunes respecto de un elemento geométrico.

Algunos de estos lugares geométricos, que veremos a continuación, servirán como herramienta para resolver determinados problemas de tangencias sencillos, ya que al igual que las propiedades anteriores nos permitirán dibujar bien una recta o una circunferencia donde seguro se encontrará un elemento importante para poder resolver el ejercicio, el centro o bien el punto de tangencia.

- En primer lugar, hablaremos del **arco capaz**. El arco capaz de un segmento respecto de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que unidos a los extremos del segmento forman entre si siempre el mismo ángulo dado.

  Para resolver problemas de tangencias será de uso habitual el **arco capaz de 90°** respecto a dos puntos, que es la semicircunferencia ya que sobre este arco se ubicará seguro el punto de tangencia solución en muchos casos. Esto lo sabemos en base a la segunda propiedad que hemos planteado en el apartado anterior, y es que para ubicar el punto de tangencia entre recta y circunferencia debemos poder encontrar el radio que forma 90° con la recta (Fig. 06)

- En segundo lugar, definiremos el concepto de **recta paralela a una distancia d de otra recta** como el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de circunferencias de radio d y tangentes a la recta dada. (Fig. 07)

- Y por último entendemos como **circunferencia concéntrica** de radio r+d a otra circunferencia de radio r que es el lugar geométrico de los puntos del plano que son centros de las circunferencias tangentes exteriores de radio d a la circunferencia de radio r. (Fig. 08)

En los dos casos anteriores estamos definiendo dos lugares geométricos, recta en el primero y circunferencia en el segundo, donde seguro se encontrará el centro solución de algunos ejercicios.

3. TRAZADO DE TANGENCIAS

Existen **diferentes métodos** para resolver problemas de tangencias de mayor o menor complejidad.

Los problemas más básicos se resolverán aplicando simplemente las propiedades básicas que hemos descrito o combinándolos con los lugares geométricos a los que nos hemos referido ya que en esos casos estamos definiendo como mínimo dos elementos geométricos donde seguro se encontrará la solución de nuestro ejercicio y combinándolos podremos determinar centros y puntos de tangencias solución.

En otros casos debemos apoyarnos en conceptos de geometría más complejos como dilataciones, homotecias, potencias e inversiones.

Existen muchísimos planteamientos de problemas de tangencias para resolver y este, por ser un tema teórico no puede ni debe pretender explicarlos todos, sino más bien, demostrar a través de ejemplos concretos que dominamos el manejo de estos conceptos de manera general. Por ello reduciremos el número de ejemplos a los que bajo mi criterio son más claros a la hora de ilustrar los procesos que plantearemos.

3.1. TRAZADOS BÁSICOS

Veremos en primer lugar algunos ejemplos que se resuelven aplicando simplemente alguna o algunas de esas 4 propiedades básicas que hemos planteado.

- Para buscar **una recta tangente a una circunferencia dada por un punto concreto de la misma** nos basaremos en la propiedad 2 ya que sabemos que trazando el radio que une el centro con ese punto T dado podremos trazar la recta pasando por ese punto y perpendicular a este radio. (Fig. 09)
- Si lo que se nos plantea es buscar **las rectas tangentes a una circunferencia y paralelas a una dirección dada** también nos apoyaremos en esta propiedad 2, ya que conociendo la dirección de las rectas conocemos la dirección de los radios que determinarán los puntos de tangencia, es decir, ortogonales a la dirección dada. (Fig. 09)
- En un tercer caso nos planteamos como buscar **las circunferencias tangentes a una circunferencia dada conociendo el punto de tangencia T sobre esta y conocido también su radio R.** (Fig. 10)

En primer lugar, aplicando la primera propiedad sabemos que los centros de las dos circunferencias han de estar alineados con el centro de la circunferencia que nos dan O y el punto de tangencia T.
Será este por tanto el haz de centros y solo debemos ubicarlos sobre él. Lo haremos partiendo de que la distancia entre centros se corresponderá con la suma de los radios. De esta manera determinaremos los dos centros O_1 y O_2 en la recta uno a cada lado de T a la distancia R que nos han dado.

- Veremos ahora como buscar **la circunferencia tangente a una recta dado el punto de tangencia sobre ella T y un punto P exterior** por el que ha de pasar la circunferencia. (Fig. 11)
  Sabemos en base a la propiedad 2 que el centro buscado estará sobre la recta perpendicular a la recta dada desde T. Para saber en qué punto de esta recta aplicaremos la tercera propiedad, ya que sabemos que el segmento PT ha de ser una cuerda de la circunferencia, sabemos que el centro de esta además ha de estar en la mediatriz de este segmento. Trazando estas dos rectas determinaremos el centro en la intersección de ambas.

- Y para finalizar este apartado plantearemos un último caso en el que se nos pida buscar **las circunferencias tangentes a dos rectas dado el punto de tangencia en una de ellas**. (Fig. 12)
  Sabemos según dice la cuarta propiedad que los centros de las dos circunferencias estarán sobre las bisectrices de los dos ángulos que determinan la dos rectas y que son adyacentes al lado sobre el que se ubica el punto T. Además, según la propiedad 2 estarán sobre la perpendicular a la recta sobre la que se ubica T desde este punto. Cruzando los tres haces de centros ubicaremos los dos centros buscados.

3.2. TRAZADOS POR LUGARES GEOMÉTRICOS

Plantearemos a continuación algunos ejemplos que se resolverán aplicando los conceptos de lugares geométricos, aunque también alguna de estas propiedades básicas.

- En primer lugar, plantearemos buscar las **circunferencias tangentes a una recta r conocido su radio R y que pasen por un punto P exterior** a la recta. (Fig. 13)
  Por la definición de lugar geométrico de rectas paralelas sabemos que los centros de las dos circunferencias estarán sobre la recta paralela a r a una distancia igual al radio R, es decir, este será uno de los haces de centros.

  Y, además, según la propiedad 1, estarán a una distancia también igual al radio R del punto P. Por tanto, si trazamos la recta y una circunferencia con centro en P y radio R, encontraremos los centros O_1 y O_2 de las dos circunferencias buscadas en donde intersequen ambos elementos, que por tanto serán los puntos que cumplan ambas circunstancias.

- Ahora aplicaremos el concepto de circunferencias concéntricas para buscar las **circunferencias tangentes a dos circunferencias dadas y de radio conocido R.** (Fig. 14)

Aplicando este concepto de lugar geométrico sabemos que los centros de las dos circunferencias estarán sobre circunferencias concéntricas a las dos dadas cuyo radio será la suma del de cada una de ellas más el radio R que nos han facilitado. Trazando ambas circunferencias determinaremos los dos centros donde las dos intersequen.

- Y por último veremos cómo aplicar el concepto de arco capaz de 90º junto con la propiedad 2 de las tangencias para encontrar las **rectas tangentes a una circunferencia que pasen por un punto exterior a ella P**. Este proceso además lo aplicaremos de manera habitual como parte de la resolución de otros procesos más complejos. (Fig. 15)

  Sabemos que las rectas buscadas para ser tangentes a la circunferencia dada tendrán que ser perpendiculares al radio que corresponde con el punto de tangencia T según la propiedad 2 de las tangencias. Por tanto, si dibujamos el arco capaz de 90° del segmento determinado por O, el centro de la circunferencia dada, y P; estaremos dibujando todos los puntos que unidos a esos extremos formarán 90° entre sí. Los que en concreto corten a la circunferencia dada serán por tanto los dos puntos de tangencia T, ya que el segmento que une al centro O con T será el radio y el segmento que une T con P determinará la recta y entre ambas se formarán 90° por pertenecer T al arco capaz trazado.

3.3. TRAZADOS POR DILATACIONES

El método del **trazado de tangencias por dilataciones** consiste en reducir una de las circunferencias que nos facilitan como dato a un punto. Esto se consigue dilatando (positiva y negativamente) los demás elementos geométricos que intervienen en la misma medida que debe ser reducida la circunferencia para convertirse en un punto, es decir, su radio. El resultado es una simplificación ya que en lugar de buscar la tangente a una circunferencia lo hacemos a un punto como veremos ahora en algún ejemplo concreto.

- Por ejemplo, si buscamos **las rectas tangentes a dos circunferencias de distinto radio** (Fig. 16), lo que haremos será aplicar la dilatación trazando las dos circunferencias concéntricas a las más grande, sumando y restando el radio de la pequeña. De esta manera reducimos el ejercicio a buscar las 2 rectas tangentes desde punto, el centro 0_1 de la circunferencia pequeña, respecto de las dos circunferencias dilatadas, o concéntricas, a la grande; es decir, el último caso que vimos en el apartado anterior.

  El resultado serán **4 rectas**. Las dos soluciones respecto de la circunferencia que suma el radio serán las tangentes exteriores a ambas circunferencias, mientras que las dos soluciones respecto de la circunferencia que resta el radio serán las tangentes interiores. Y serán paralelas a las soluciones obtenidas a través de la dilatación, con lo cual también lo serán los cuatro radios que nos ayudarán a concretar los cuatro puntos de tangencia.

- En otro ejemplo veremos como buscar **las dos circunferencias tangentes a otra dada y a una recta r dado el punto de tangencia T sobre la recta**. (Fig. 17)

Para poder interpretar la circunferencia como un punto debemos desplazar la recta r en paralelo a ambos lados de esta junto con el punto de tangencia T la distancia que corresponde con el radio de la circunferencia. Así reducimos el problema a buscar los centros de las circunferencias que son tangentes a una recta por un punto dado, el punto T desplazado, y un punto exterior, que es el centro de la circunferencia dada, como reducción de esta a un punto. Ejercicio que ya hemos resuelto en apartados anteriores.

3.4. TRAZADOS POR HOMOTECIA

Los tres métodos que veremos a continuación, aplicando la relación de homotecia entre dos circunferencias cualesquiera primero, luego los conceptos potencia e inversión, nos permitirán resolver ejercicios más complejos en los que no podremos cruzar elementos geométricos que nos den la solución como en los casos anteriores. En estos casos generalmente solo podremos determinar un haz de centros que por si mismo no resuelve el ejercicio.

Los tres métodos no siempre se pueden utilizar para resolver el mismo ejercicio, pero me parece interesante como planteamiento teórico explicarlos sobre el mismo. Lo que haremos será buscar **las dos circunferencias tangentes a una recta r y que pasen además por dos puntos exteriores a ella que llamaremos MN** aplicando los tres métodos.

En todos ellos nos basaremos en primer lugar en la propiedad 3, ya que MN han de ser los extremos de una cuerda de las circunferencias, y sabemos que sus dos centros estarán sobre la mediatriz de este segmento. Será por tanto un haz de centros.

Y ahora veremos como ubicar los dos puntos sobre esta recta basándonos en que dos circunferencias cualesquiera serán siempre homotéticas entre sí y el centro de homotecia estará alineado con sus centros y el punto de intersección de sus tangentes comunes. (Fig. 18)

- **El centro de la homotecia** será el punto C que resulta de intersecar la mediatriz de MN con la recta dada r y trazaremos una **circunferencia auxiliar cualquiera que cumpla la homotecia** que buscamos. Es decir, cuyo centro esté en la mediatriz de MN y sea tangente a r para a continuación buscar **los puntos homotéticos de uno de los puntos**, por ejemplo, **N sobre esta circunferencia.**

- Para ello trazamos el rayo proyectante que parte del centro C y por N, sus puntos homotéticos los llamaremos N' y N'' y estarán en la intersección de este rayo con la circunferencia auxiliar.

- Pues bien, como **el paralelismo es un invariante de las homotecias**, sabemos que los radios de esta circunferencia a estos puntos OA y OB serán paralelos a los homotéticos en las circunferencias que buscamos. Luego trazando paralelas a estos radios desde M y N podremos determinar los dos centros de ambas circunferencias sobre el haz de centros.

3.5. TRAZADOS POR POTENCIA Y ELEMENTOS RADICALES

Resolveremos ahora el mismo ejercicio basándonos en el concepto de potencia y de eje radical.

La potencia se trata de un valor constante del producto entre los segmentos producidos al cortar a una circunferencia con rectas secantes que tienen origen en un punto P y el **eje radical** es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto a dos circunferencias-. Si este valor es constante para cualquier recta, sabemos que llegado al límite de que la recta sea tangente a la circunferencia en un punto T el valor de la potencia será PT^2. (Fig. 19)

- Se cumple que la **cuerda que tienen en común un haz de circunferencias es eje radical de todas ellas** y, ya que las dos circunferencias que buscamos tienen en común la cuerda MN, sabemos que esta recta será un eje radical de ambas y cualquier punto sobre ella tendrá la misma potencia.
- Si además suponemos que r, la recta que nos han dado es otro eje radical, **el punto de intersección entre ambos ejes C será un centro radical** y tendrá la misma potencia también. Como ambas circunferencias han de ser tangentes a la recta r el **valor de la potencia tendrá que ser necesariamente PT^2** y, por tanto, existirá una **circunferencia** con centro en C y radio PT^2 que sea el lugar geométrico de todas las tangentes a todas las circunferencias que comparten ese centro radical C.
- Lo que haremos será buscar el valor de ese radio ayudándonos de una **circunferencia auxiliar** que comparta la cuerda MN por lo que su centro O ha de estar sobre la mediatriz del segmento. Para luego desde el centro radical C hallar la recta que le sea tangente y que por tanto definirá el radio de la circunferencia de centro C y radio PT^2 que buscábamos.
- **Los puntos de tangencia** T_1 y T_2 de las dos circunferencias buscadas por tanto estarán en la intersección de esta circunferencia con la recta r y una vez ubicados podremos hallar los centros de ambas circunferencias O_1 y O_2 trazando sus radios perpendiculares a r desde los puntos de tangencia hasta el haz de centros definido por la mediatriz de MN.

Este tipo de ejercicios siempre se resolverán pasando por **un proceso parecido a este**:

→ En primer lugar, debemos definir un haz de centros basándonos en alguna de las propiedades básicas de las tangencias que ya conocemos.

→ Luego debemos trazar alguna circunferencia auxiliar que nos convenga que para ello debe tener su centro sobre el haz de centros y pasar o cortar a otros elementos geométricos del ejercicio, en este caso pasar por MN.

→ A continuación, debemos definir dos ejes radicales que compartirán esta circunferencia con las dos que buscamos para poder determinar el centro radical.

→ Este será el punto clave por que estará a la misma distancia de los puntos de tangencia a las tres circunferencias, las que buscamos y la auxiliar que ya tenemos. Podremos por tanto determinar esa distancia respecto a la circunferencia auxiliar y trazar el lugar geométrico de los puntos que cumplen esta condición, es decir la circunferencia con centro en el centro radical y radio PT^2 lo que nos determinará los otros puntos de tangencia al intersecar con los otros elementos geométricos.

→ Una vez obtenidos los puntos de tangencia ellos podremos dibujar otros haces de centro que intersecar con el primero que habíamos dibujado y así determinar los centros buscados.

3.6. TRAZADOS POR INVERSIÓN

Y por último veremos como resolver el mismo ejercicio aplicando el concepto de inversión.

La inversión es una transformación geométrica que está relacionada con el concepto de potencia ya que los pares de puntos inversos han de cumplir una relación de proporción igual al de potencia respecto de un punto que será el centro de inversión O. Es decir, el producto de los segmentos definidos por puntos inversos al centro de inversión es constante, un valor que llamamos K, **razón de la inversión**.

Todo proceso de inversión tiene **dos propiedades** en las que nos basaremos para resolver estos ejercicios de tangencias:

- La primera es que las **tangencias se conservan en las inversiones**. Es decir, los inversos de dos elementos tangentes son también tangentes.
- Y la segunda es que **los inversos de rectas que no pasan por el centro de inversión son circunferencias que si pasan por el centro de inversión**.

El método consiste siempre en seguir los **mismos pasos**:

→ Primero definir un centro de inversión y una circunferencia de puntos dobles o autoinversión conveniente. Esta circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que son inversos de sí mismos, que serán los puntos de tangencia, por tener que cumplirse $PT \times PT' = PT^2 = K$ y su centro es el centro de inversión.

→ Luego hallar los inversos de todos los elementos.

→ Para a continuación trazar las tangentes a los inversos.

→ Y por último hallar los inversos de esas tangentes que serán las que buscábamos sobre los elementos generales

Aplicaremos ahora este procedimiento para resolver el ejercicio planteado (Fig. 20):

· Como **centro de la inversión** vamos a suponer uno de los dos puntos por los que han de pasar las dos circunferencias, por ejemplo, el punto M. Y como **circunferencia de puntos dobles** la que sea tangente a r, ya que está será condición de las dos circunferencias que buscamos.

· Ahora determinaremos **los inversos de los elementos.** Es decir, r y N.
r por ser una recta que no pasa por el centro de inversión, tendrá como inversa una circunferencia que si pase por el centro M y que también pasará por T, el punto de tangencia con la circunferencia de puntos dobles ya que necesariamente T = T'.

N′ lo hallamos por el método habitual utilizando la circunferencia de puntos dobles. Es decir, trazamos la recta tangente a la circunferencia desde N utilizando el arco capaz de 90º, para luego aplicando la media proporcional, hallar N′ sobre el segmento que une N con el centro de la inversión M.

- El siguiente paso será hallar **los puntos de tangencia** T_1 y T_2 a la circunferencia inversa de r desde N′. Esto es las tangentes a una circunferencia desde un punto exterior que ya sabemos calcular aplicando el arco capaz de 90º.
- Por último, debemos hallar **los inversos T_1' y T_2' sobre r**. Para ello prolongaremos la tangente de T_1' hasta hallar los inversos AB sobre la circunferencia de autoinversión. Por tanto, como las circunferencias buscadas han de pasar por estos puntos y por los puntos MN, es decir AB y MN serán cuerdas de la circunferencia y por tanto el centro de la primera circunferencia estará sobre la intersección de las mediatrices de ambos segmentos.

  Debemos hacer el mismo proceso con T_2 para buscar el centro de la segunda circunferencia.

4. LOS 10 CASOS DE APOLONIO

Apolonio de Perga fue un matemático griego conocido por su tratado sobre las curvas cónicas, pero también por su famoso **problema de Apolonio** que tiene el siguiente enunciado:

> *"Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto (P), una recta (R) o una circunferencia (C) , dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados"*

Esta combinación de tres posibles datos de partida nos da 10 casos concretos que son conocidos como los **10 casos de Apolonio**.
Los casos más sencillos se resuelven según los supuestos de Euclides directamente y se cree que Apolonio planteó las soluciones de otros siete, es decir nueve en total. Y decimos se cree ya que los tratados que el escribió se han perdido y solo se conocen a través de tratados posteriores que hace referencia ellos.

El último caso, el que plantea buscar la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas, se cree que fue resuelta de manera gráfica por primera vez por Isaac Newton.

Por tanto, debemos dejar claro que **los problemas de Apolonio** se tratan de una recopilación y clasificación de ejercicios de tangencias en los que se busca es una circunferencia tangente a algún otro elemento y que cada uno se resuelve por uno o por varios métodos todos ellos basados en todo lo anteriormente explicado.

5. ENLACES Y APLICACIONES

Y por último hablaremos de los enlaces, que son la aplicación real de los problemas de tangencias. Llamamos enlace a la unión armónica de dos o más líneas (curvas y/o rectas) entre si por medio de tangencias.

Su aplicación es variadísima en el mundo del diseño, ya que multitud de objetos, logos, tipografías, carreteras y hasta edificios, etc… tienen su forma final basada en este tipo de uniones. Por tanto, un diseñador industrial, un ingeniero, un arquitecto o un diseñador gráfico trabajan continuamente buscando esta unión armoniosa entre elementos geométricos.

Lo que ocurre es que hoy en día el dibujo asistido por ordenador resuelve estos problemas de manera directa sin que finalmente un diseñador tenga que conocer a fondo el proceso real que hay detrás y que estará basado seguro en los procedimientos que hemos desarrollado durante este tema.

Por tanto, si bien podríamos explayarnos en infinitos ejemplos basados en las infinitas combinaciones de posibles diseños basados en las tangencias entre elementos geométricos simplemente plantearemos dos ejemplos muy básicos, ya que lo otro carecería de sentido en un tema como este.

Por ejemplo, **enlazar dos rectas r y s mediante un arco de circunferencia de radio concreto R**. Sabemos aplicando el concepto de lugar geométrico de las rectas paralelas que el centro de este arco tendrá que estar en las rectas paralelas a r y s a una distancia igual al radio R del arco que buscamos. Luego si trazamos ambas rectas determinaremos el centro en el punto de intersección, ya que ese será el punto que cumpla el requisito para las dos rectas. (Fig. 21)

En otro ejemplo sencillo nos planteamos **enlazar una recta r y un arco de circunferencia de centro O y radio R por medio de otro arco de circunferencia de radio R_1** y que sea exterior a la circunferencia facilitada. En este caso determinaremos el centro O_1 de la circunferencia que buscamos combinando el lugar geométrico de la recta paralela a r a una distancia R_1 y la circunferencia concéntrica a la dada de radio $R-R_1$, determinando el centro en el punto de intersección de ambas. (Fig. 22)

No nos olvidemos que en estos ejercicios también es fundamental no solo realizar el enlace si no también indicar clara y concisamente donde se ubica el punto de tangencia entre todos los elementos.

6. CONCLUSION

En este punto final podemos afirmar que la complejidad de este tema puede ir de lo más sencillo a manejar procesos y relaciones realmente complicadas que a nuestros alumnos/as les cuesta manejar y comprender, sobre todo teniendo en cuenta, como ya se ha comentado, que la aplicación directa de estos ejercicios hoy en día queda obsoleta.

Ahora bien, a mi me parece que este tipo de ejercicios resultan muy constructivos a la hora de nuestro alumnado ejercite y estructure su mente a procesos técnicos laboriosos y que no solo ayudarán a educar su visión espacial si no también matemática. No olvidemos que si finalmente en la práctica existen programas informáticos que resuelven no solo tangencias si no todo tipo de representaciones gráficas es porque detrás existe programación matemática para poder llevarlo a cabo.

Por ello creo que resulta fundamental que nuestro alumnado asimile este esquema de pensamiento primero asimilando los conceptos más básicos en los cursos base de la ESO para poder luego aplicarlos con fluidez en los cursos superiores de bachillerato científico-técnico en las materias de dibujo, matemáticas o física, aunque también por ejemplo en temas compositivos que tienen vital importancia para entender el arte en materias del bachillerato de artes como diseño, fundamentos del arte, etc.…

7. ALGUNAS REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y WEBS

- Geometría Descriptiva Tomos 1-5. | F. Javier Rodríguez de Abajo | Ed. Donostiarra, San Sebastián
- Dibujo técnico I 1º Bachillerato – Guía Práctica para el alumno | Joaquín Gonzalo Gonzalo | Ed. Donostiarra, San Sebastián.
- Geometría Descriptiva: Ejercicios resueltos y bibliografía comentada | Juan Carlos Gómez Vargas | Ed. Universidad de Granada, Granada 2016
- Estudio de los sistemas de representación | Julián Giménez Arribas | Prensa Española, Madrid 1966
- Geometría Descriptiva | Fernando Izquierdo Asensi | Ed. Paraninfo, Madrid 1993

IMÁGENES

Figura 1A

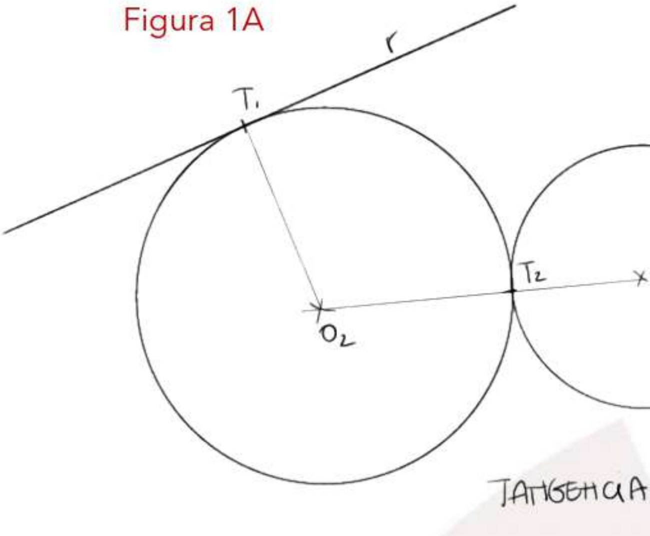

Figura 1B

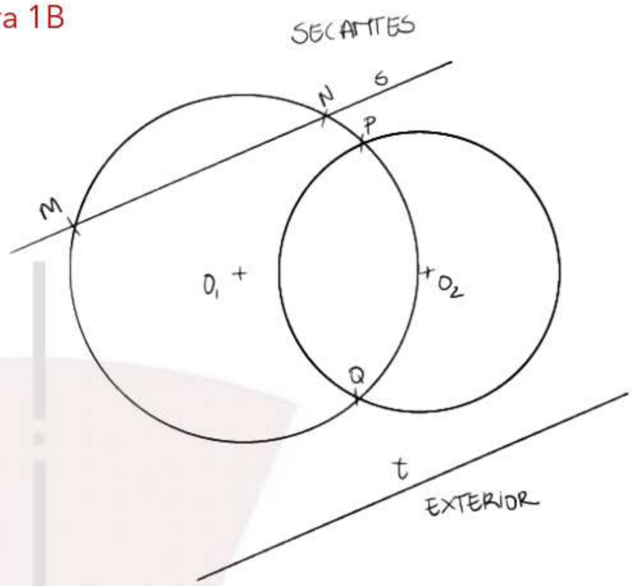

Figura 2

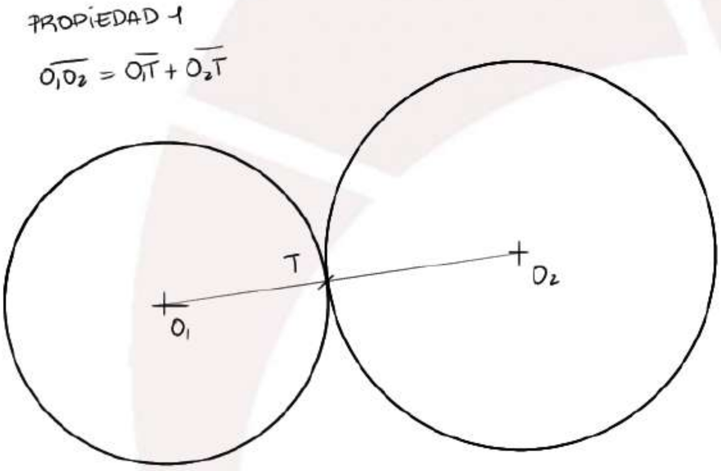

Figura 3

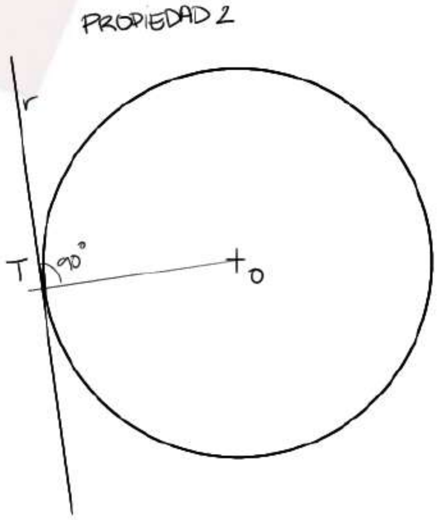

Figura 4

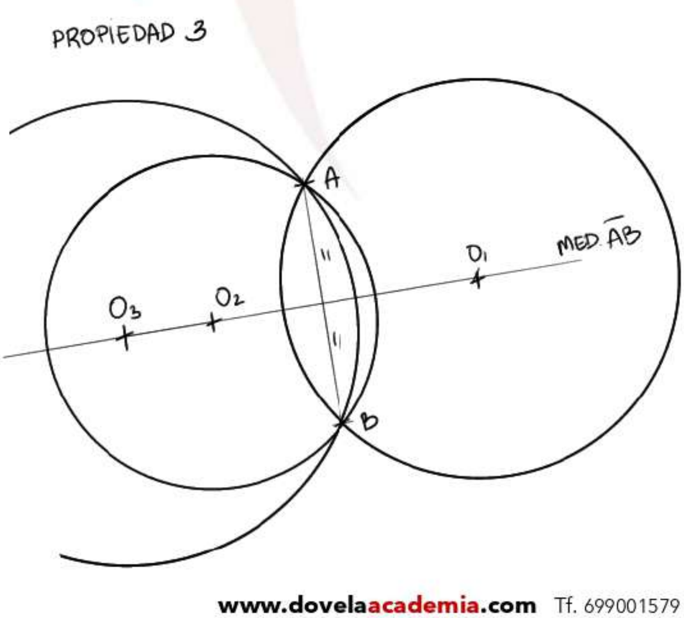

Figura 5

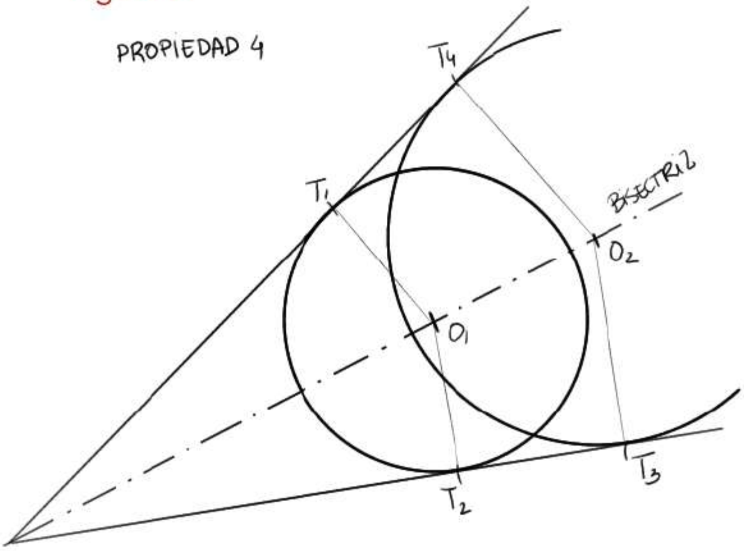

Figura 6

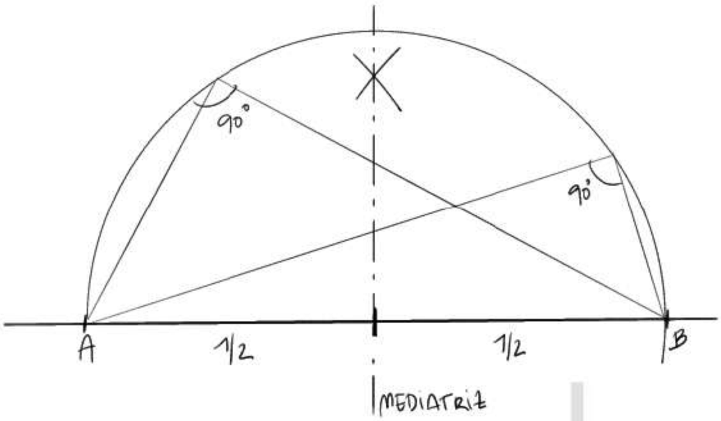

Figura 7

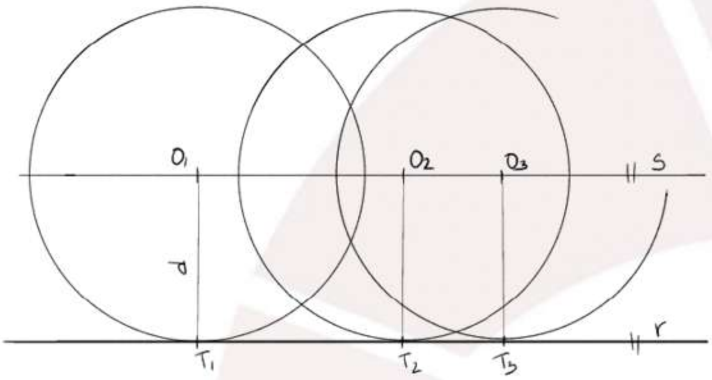

Figura 8

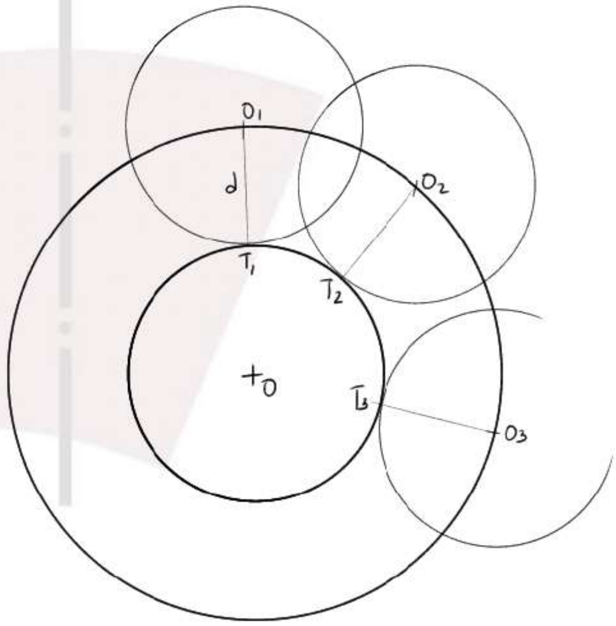

Figura 9

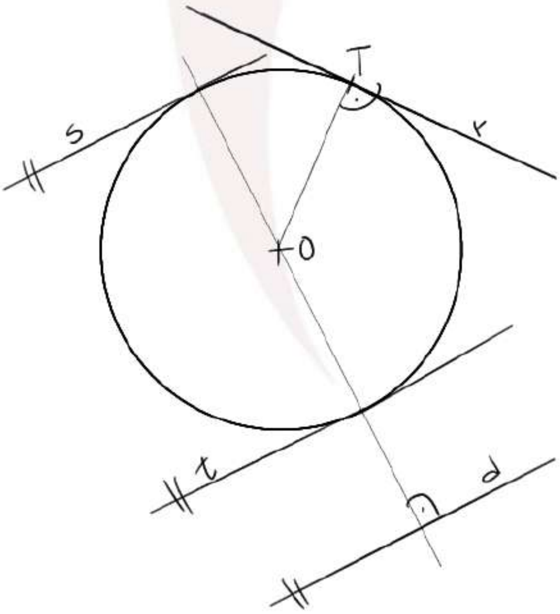

Figura 10

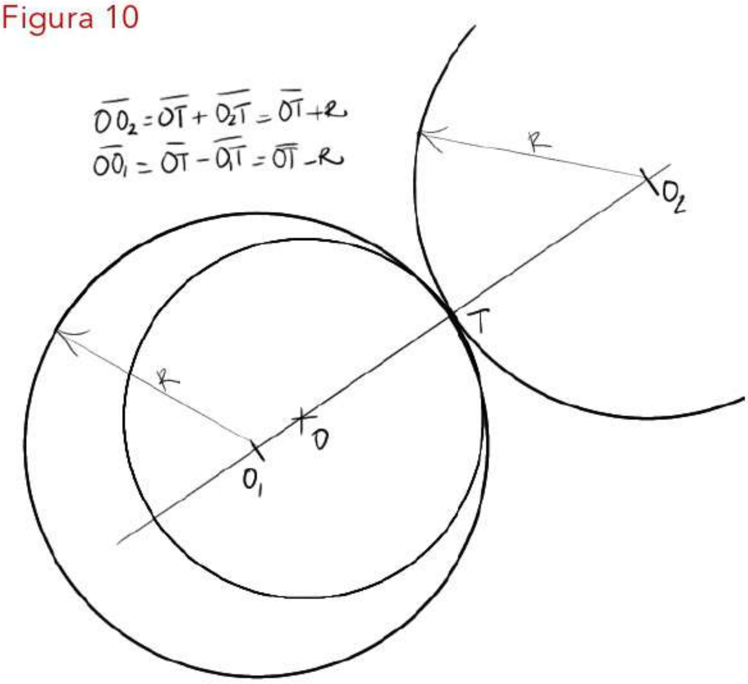

Figura 11

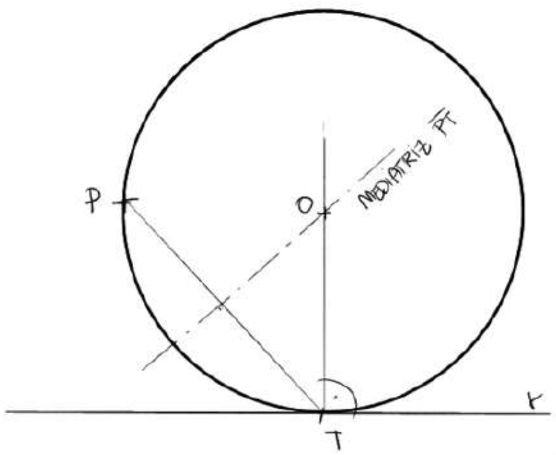

Figura 12

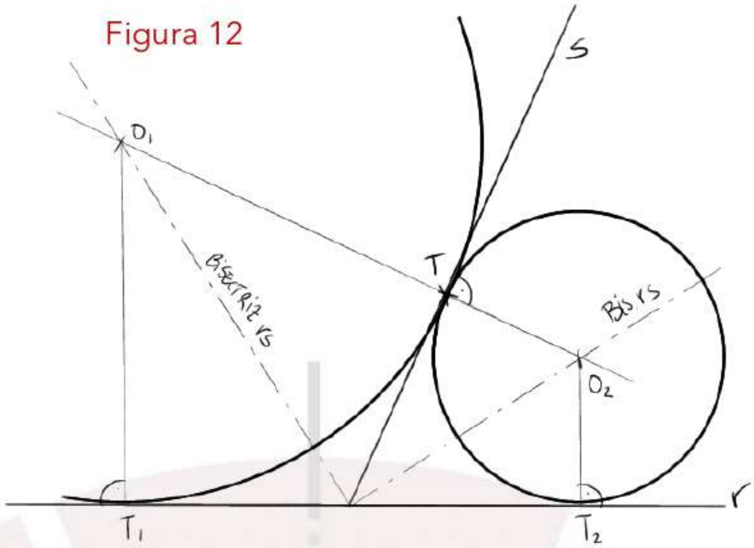

Figura 13

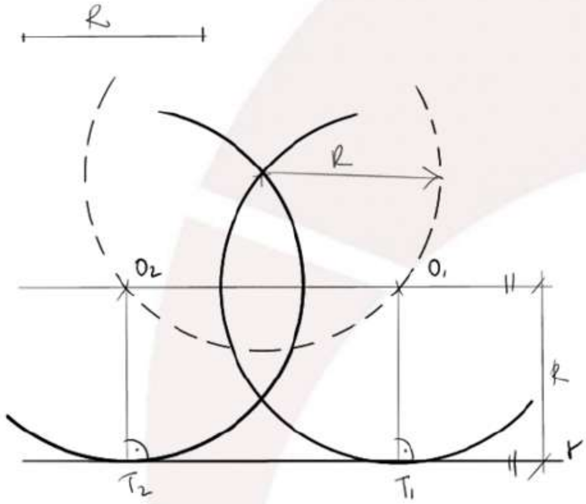

Figura 14

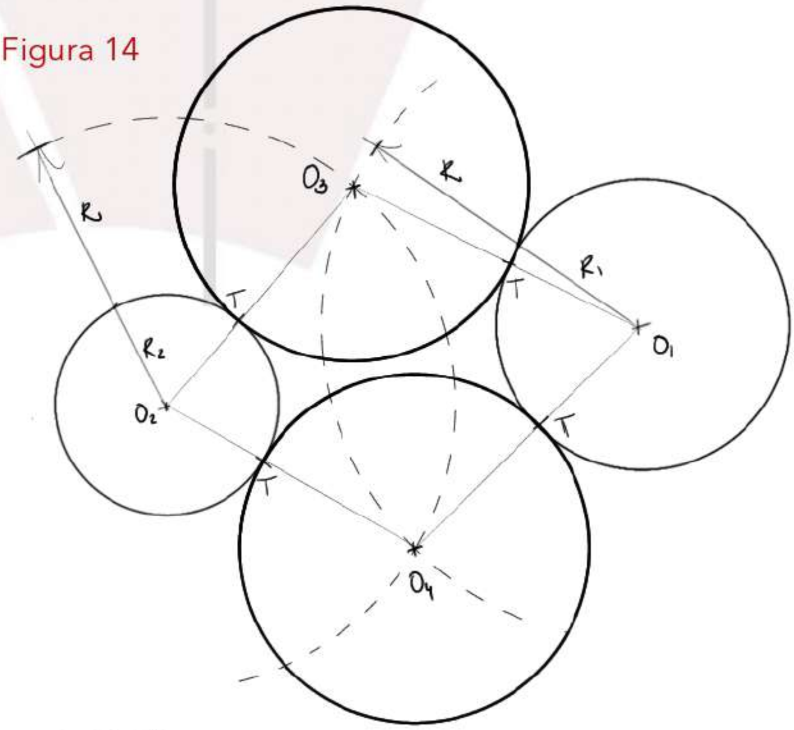

Figura 15

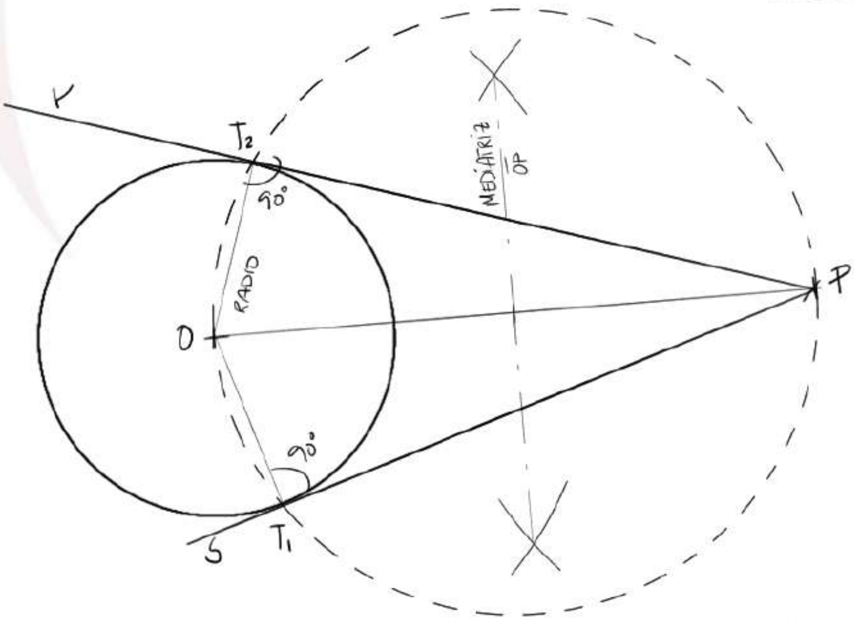

Figura 16

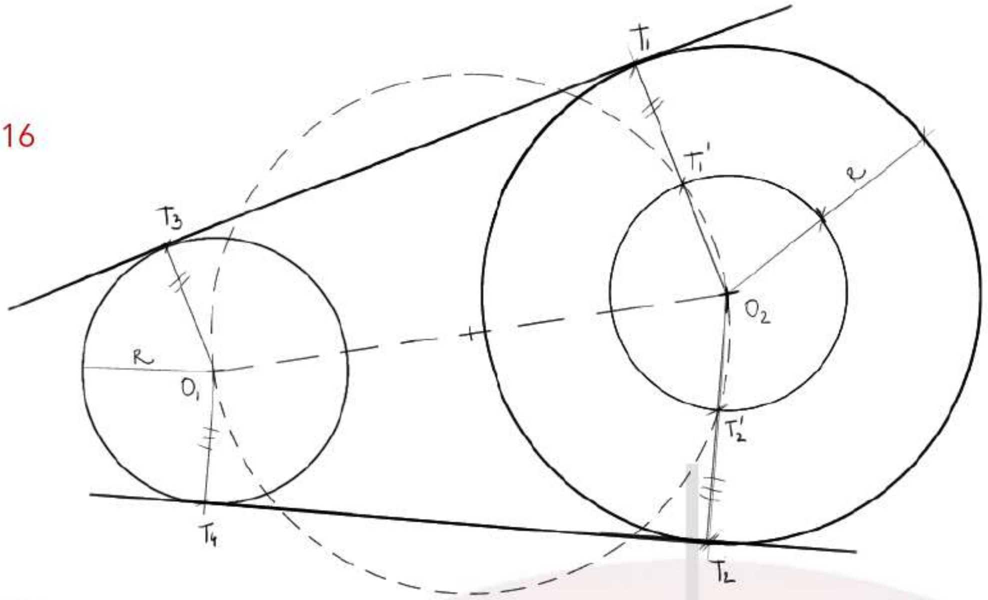

Figura 17

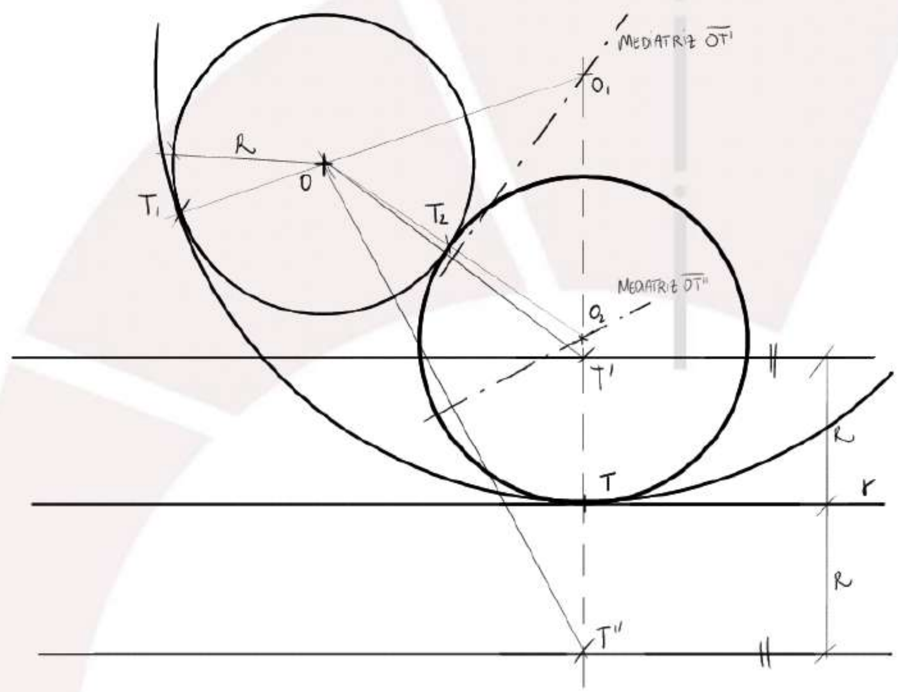

Figura 18

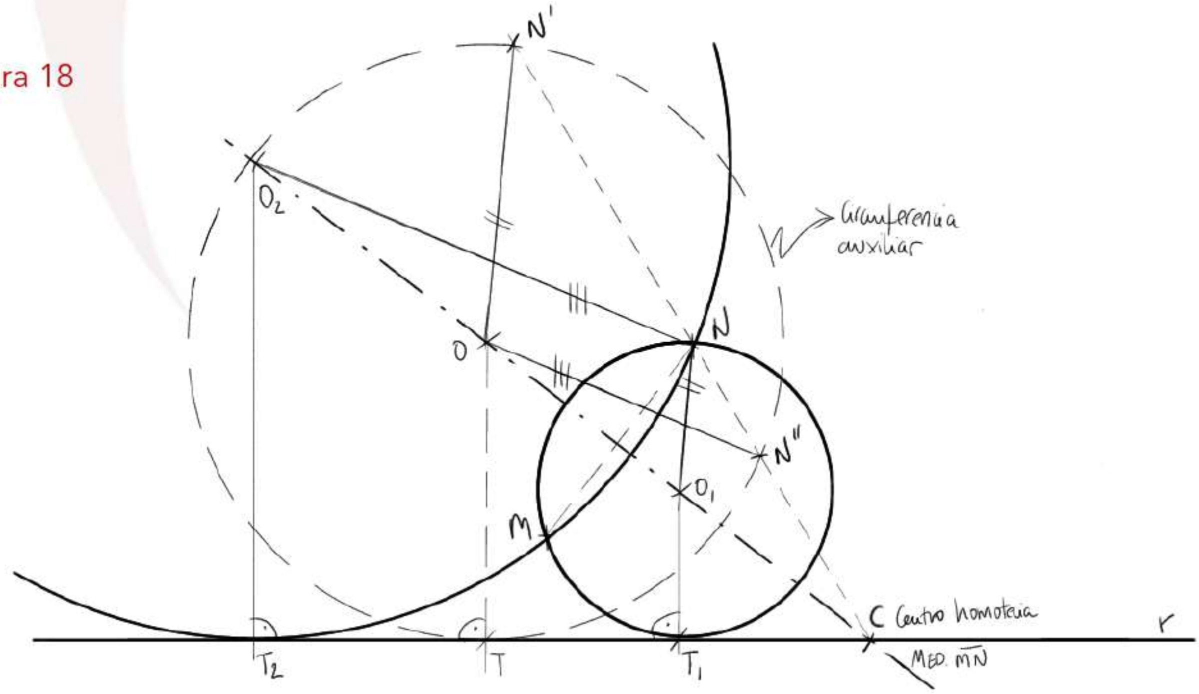

Figura 19

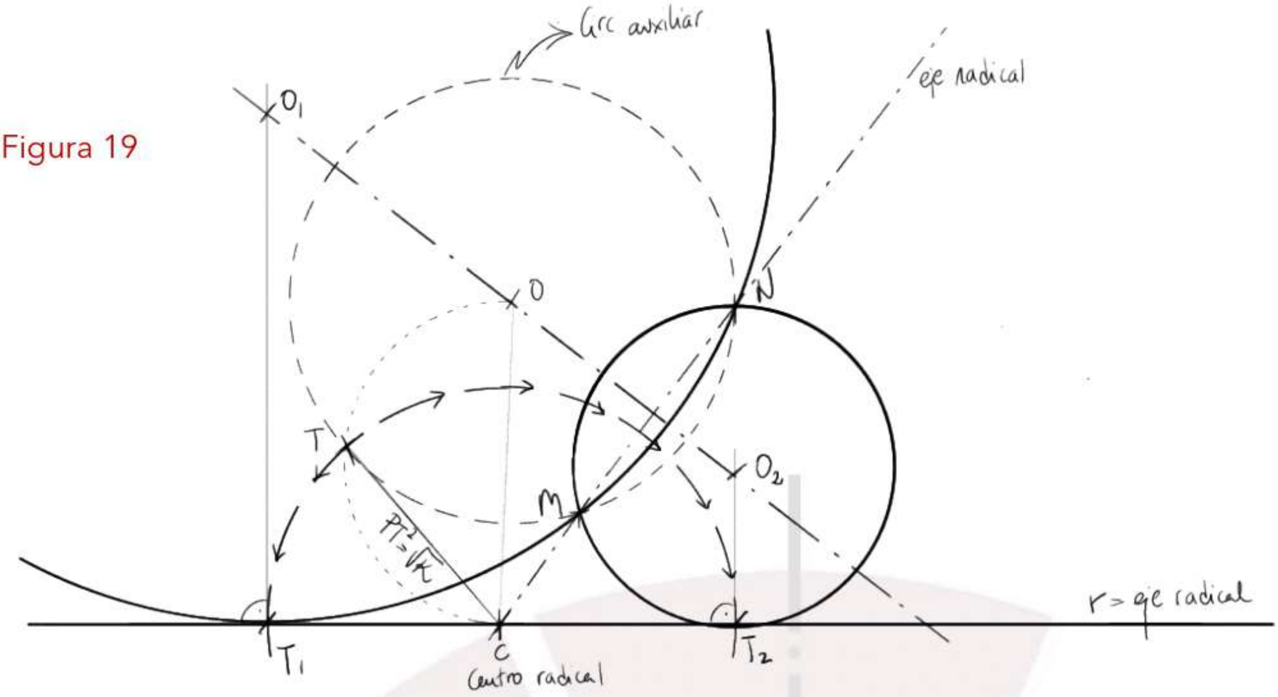

Figura 20

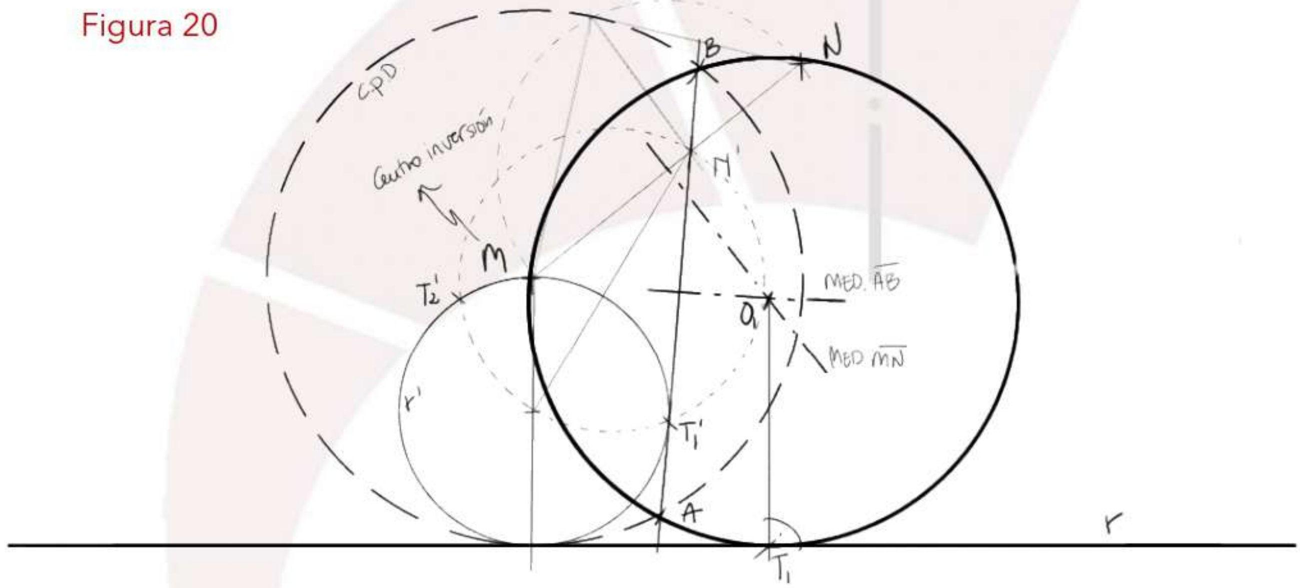

Figura 21

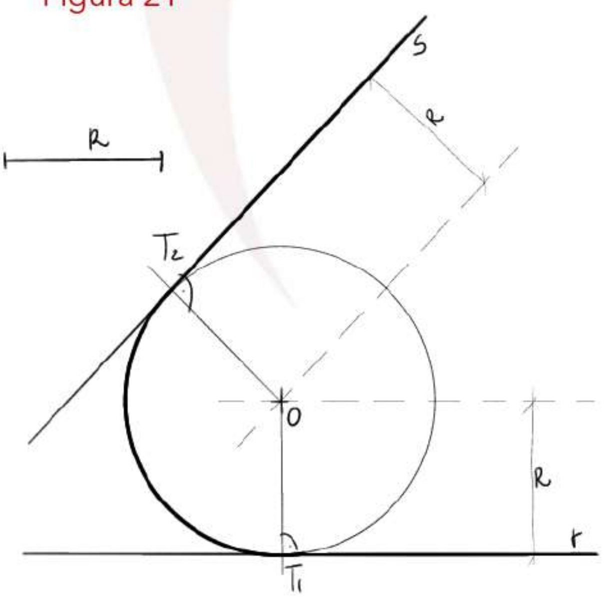

Figura 22