TEMA 37· Geometría proyectiva. Homografía, homología y afinidad

Autora: Iria Senra Álvarez

ESQUEMA/ ESTRUCTURA TEMA 37

1. INTRODUCCIÓN

La palabra **geometría** viene de las griegas "geo" =tierra y "metron" =medida, es decir, "medida de la tierra". Y es que precisamente **su estudio surge de la necesidad de egipcios y babilonios de medir y controlar las tierras de cultivo y herencias.** Aun así, fueron los **griegos** como Tales de Mileto, Pitágoras o Euclides, entre otros, los que realmente profundizaron en la **sistematización de su estudio** desde un punto de vista científico y matemático tal y como hoy la entendemos. Sentaron las bases de la geometría plana elemental que se usaría durante siglos hasta nuestros días.

Con el paso del tiempo se desarrolló otro campo fundamental de la geometría que buscará la representación sobre el plano de objetos reales, es decir, **en 3 dimensiones sobre una superficie bidimensional**, de tal manera que nos permita la comunicación y la transmisión de una idea de cómo es ese objeto en la realidad. Este campo se llama geometría descriptiva, y si bien esta necesidad de plasmar nuestro mundo tridimensional sobre el plano existió de una manera u otra durante toda la historia de la humanidad, no fue hasta el siglo XVIII cuando se sistematizó su aplicación como ciencia. En 1799 **Gaspar Monge** publica su **libro "Geometría descriptiva"** y los intereses militares e ingenieriles primero, y el desarrollo industrial después, lo tomaron como herramienta fundamental de comunicación y diseño hasta nuestros días.

Durante el desarrollo de este tema vamos a ahondar, no directamente en los sistemas de representación, si no en las transformaciones geométricas basadas en la proyección como proceso fundamental y que son la base conceptual sobre las que se asientan sus diferentes procedimientos.

En un tema anterior en el temario de la oposición se estudian las transformaciones entendidas solo en el plano, y aquí veremos cómo pueden ser entendidas desde un punto de vista espacial si bien su funcionamiento acaba siendo el mismo.

Partiremos de definir qué entendemos como **transformación proyectiva** para luego definir las **propiedades básicas de las homografías** y ahondar a continuación en el funcionamiento de las **homologías y las afinidades**, pilares fundamentales de los diferentes sistemas de representación.

2. DEFINICIÓN GEOMETRÍA PROYECTIVA

Mientras que la geometría plana estudia los problemas relacionados con los elementos geométricos y figuras contenidas en un solo plano, **la geometría proyectiva** estudia un modo de transformar o relacionar entre si elementos geométricos contenidos en un plano a otro plano diferente en el espacio, de tal modo que se mantienen invariantes su orden, incidencia y concurrencia.

2.1. TRANSFORMACIÓN PROYECTIVA

A estas transformaciones se las llama proyectivas por que establecen una relación entre los dos elementos basado en la **proyección**. Se dice que **dos formas son proyectivas** si pueden obtenerse la una de la otra mediante proyecciones y secciones de estas por un plano que las contiene.

La proyección (Fig. 1) es un procedimiento que consiste en pasar por cada punto de la figura una recta o plano rayo proyectante que al intersecar con otro plano diferente que llamaremos **plano de proyección** (PP) nos definirá la **imagen o proyección** de la figura original contenida en este.

Para transformar un punto pasaremos por él uno de estos rayos proyectantes (Fig. 1A), para transformar una recta podremos pasar dos rayos por dos de sus puntos (Fig. 1B) o bien un plano proyectante que la contenga en su totalidad (Fig. 1C) para finalmente seccionar esos rayos o planos por el plano de proyección obteniendo así una imagen sobre este a la cual se suele denominar igual que el original pero afectado por comillas o algún subíndice.

Las **operaciones de proyectar y seccionar conservan** el orden de los elementos que proyectan, aunque no siempre las medidas y las proporciones, ni formas, ni ángulos. Ello dependerá de la relación entre los rayos proyectantes con los planos y de la relación entre ambos planos entre sí.

2.2. HOMOGRAFÍA

La homografía es una transformación proyectiva en la que se establece una correspondencia particular entre el elemento original y el proyectado basada en dos propiedades que han de cumplirse siempre:

- La primera es que a cada elemento original se corresponde con un elemento homográfico de su misma especie, es decir, a un punto un punto, a una recta una recta y a una curva una curva.
- La segunda es que se conserva la incidencia. Por ejemplo, si una recta pasa por dos puntos M y N, su homográfica pasará por los puntos homográficos de estos, M' y N'.

Se cumple que dos secciones planas de una misma radiación proyectiva tienen una relación homográfica y que por tanto cumplen siempre estos dos requisitos.

Los tipos de homografía son: la homología, la afinidad, la traslación, la simetría y el giro. Aunque esta última no es proyectiva.

La homología y, su caso particular, **la afinidad**, tienen especial importancia en los procesos utilizados en la geometría descriptiva y resultará primordial entender cómo funcionan para luego comprender los fundamentos de los diferentes sistemas de representación, así como de aplicación directa en algunos de sus procedimientos prácticos más habituales.

3. HOMOLOGIA

Desde el punto de vista de la geometría plana, una **homología** (Fig. 2) es una transformación geométrica que relaciona dos figuras de un mismo plano de tal manera que se cumplan dos requisitos:

- Dos puntos para ser homólogos deben estar alineados con un punto fijo que llamamos **centro de homología**.
- Y por otro lado dos rectas homólogas se cortan en una recta fija que llamamos **eje de homología.**

Como veremos a continuación estas propiedades se cumplirán también con la **homología** entendida como una transformación proyectiva espacial.

El procedimiento de este modo se plantea como la proyección de una figura plana, y por tanto contenida en un plano sobre otro plano secante a este y desde un centro de proyección O, es decir, todos los rayos proyectantes parten de este punto fijo del espacio que además no pertenece a ninguno de los dos planos. En este caso el eje de homología es la traza entre ambos planos y cumple la misma propiedad que en la homología en el plano. (Fig. 3)

Es más, observamos que si abatimos uno de los planos hasta hacerlo coincidir con el otro o bien si realizamos una proyección de todo el sistema sobre un tercer plano obtendríamos la homología plana tal y como la hemos descrito en un principio.

Observamos también que estos procedimientos son los que utilizan los sistemas diédrico, axonométrico o cónico de manera habitual y por ello la homología resulta fundamental tanto para comprender su fundamento como para resolver muchas de sus operaciones.

3.1. ELEMENTOS DOBLES

Los **elementos dobles** en una homología son aquellos que son homólogos de sí mismos. Deducimos por tanto que se corresponden con el **centro de la homología**, ya que todos los rayos parten de él, y el **eje de homología**, por cortarse toda recta con su homóloga en esta recta.

De esto, y basándonos en el principio de incidencia anteriormente planteado, podemos deducir que:

- Si una recta pasa por el centro de homología, su homóloga también lo hará.
- Si una recta corta a un punto del deje de homología, su homóloga lo hará también en el mismo punto, por ser homólogo de sí mismo.
- Y por último si una recta no tiene ningún punto sobre el eje, su homóloga tampoco los tendrá y por tanto serán paralelas entre sí.

3.2. RECTAS LIMITE

Definimos ahora otro elemento esencial en las homologías que son las **rectas límite**. Estas son las rectas cuyos homólogos están en el infinito y viceversa. Por tanto, no pueden tener ningún punto doble y no se pueden entonces cortar con el eje de homología, de lo cual deducimos que son paralelas a él.

Desde el punto de vista espacial coinciden con las trazas o intersección de los planos que definen la homología con otros dos paralelos al opuesto y que pasar por el centro de homología, por ser estos el lugar geométrico formado por los rayos proyectantes paralelos a la figura dada y su homóloga y por tanto nunca se cortarán con el eje de homología.

Poniendo un ejemplo concreto (Fig. 4) si α y β son los planos que definen la homología, es decir, α el plano que contiene a la figura original y β el plano que contiene a su homóloga:

- **La recta limite 1** (RL1) es la traza entre plano α y el paralelo a β pasando por el centro de homología O.
  Es decir, como el plano paralelo a β representa a todos los rayos proyectantes que nunca se cortan con el plano de proyección por ser paralelos, la recta límite que determina esta formada por todos aquellos puntos originales que no tienen homólogo o lo tienen en el infinito.
- y **la recta límite 2** (RL2) por el contrario será la traza de plano β con un plano paralelo a α que pase por O y por tanto esta recta es el lugar geométrico de los puntos homólogos cuyo original está en el infinito, la inversa de la anterior.

Observamos también que la distancia que separa a RL1 del centro de proyección es la misma que separa a la RL2 del eje de homología.

También deducimos que si una recta definida por dos puntos cualesquiera AB, tiene un punto P sobre la RL1, el rayo proyectante OP ha de ser necesariamente paralelo a la recta homóloga A'B' ya que el punto P no puede tener homólogo.

Gráficamente lo ejemplificamos sobre una homología plana por su mayor sencillez visual. Donde también podremos observar que ocurrirá lo inverso con un punto Q de la recta que esté sobre la RL2. (Fig. 5)

3.3. DETERMINACIÓN DE UNA HOMOLOGÍA

Para poder determinar un proceso homológico en su totalidad necesitamos como mínimo que se nos facilite:

- Bien su eje y centro de homología y un par de puntos homólogos
- O bien eje y centro de homología y una recta límite.

Veremos un ejemplo del primer caso donde **se nos facilitará una pareja de puntos homólogos A y A'** y debemos **determinar la figura homóloga** del cuadrilátero irregular de ABCD **y las rectas límite de la homología**. (Fig. 6)

- Para determinar el punto homólogo de B, B', prolongaremos la recta definida por A y B hasta que corte al eje de homología en el punto doble M=M'. De esta manera ya tenemos dos puntos para poder dibujar la recta homóloga, A' y M'. Sobre ella podremos ubicar al punto homólogo de B alineado con el rayo proyectante que pase por A y el centro de la homología O que nos fue facilitado. Del mismo modo debemos proceder con los otros dos puntos del trapezoide.
- Para hallar la recta límite RL1 trazaremos desde el centro 0 el rayo proyectante paralelo a una de las rectas homólogas por ejemplo la definida por A'B'. Este rayo nunca se cortará por tanto con la homóloga, pero si lo hará con la original en un punto que llamaremos P y que no tendrá homólogo y pertenecerá a la RL1. Conociendo este punto podremos trazar la recta paralela al eje de la homología.

- Si tomamos la distancia que separa esta recta del centro de homología, podremos trazar la RL2 también paralela al eje y a esa misma distancia de él.

3.4. CASOS PARTICULARES

La **afinidad**, que estudiaremos en un siguiente apartado con detenimiento, puede entenderse como un tipo particular de homología en donde el centro sea un punto impropio o del infinito. Por tanto, los rayos proyectantes en lugar de confluir en un punto concreto del espacio serán paralelos entre sí.

La **homotecia** también se puede entender como una homología en donde los planos que contienen a las figuras homotéticas en lugar de ser secantes son paralelos entre sí. De este modo las figuras obtenidas mantienen la forma, pero no su tamaño, que guardará una relación de proporción entre ambas figuras. (Fig. 7)

Si además los planos paralelos están en lados opuestos del centro de homotecia y a la misma distancia, la homotecia se puede entender como una **simetría central** o un **giro de 180º**. Las figuras obtenidas son iguales también en tamaño pero con el orden de sus elementos invertidos.

Por ultimo la homología puede definirse como **una traslación** cuando el centro es impropio y ambos planos paralelos. De esta manera la figura homóloga será idéntica a la original pero desplazada en el espacio una determinada magnitud lineal. (Fig. 8)

4. AFINIDAD

Debido a la especial relevancia de **la afinidad u homología afín** en la geometría descriptiva, merece ser tratada aparte.

Como ya se ha planteado, es un caso particular de homología donde el centro es un punto impropio, y por tanto los rayos proyectantes son paralelos entre si siguiendo una dirección que llamamos **dirección de afinidad**. Cuando esta dirección forma 90º con el eje de afinidad la llamaremos afinidad ortogonal, y si no es así la llamaremos oblicua. (Fig. 9)

En la afinidad existe una **relación de proporcionalidad** entre las magnitudes de las figuras afines. Una relación matemática que se define por la siguiente expresión:

$AA_0/A_0A' = BB_0/B'B_0 = CC_0/C'C_0 = \ldots$ y así consecutivamente y todo ello es igual a un valor constante K que llamamos **razón de afinidad**.

En esta expresión los puntos afectados por el subíndice 0 son el punto de intersección del rayo proyectante que pasa con ese punto con el eje de afinidad. Es decir, cada punto afín se desplaza sobre el rayo proyectante una distancia igual a la distancia que separa al original del eje de afinidad multiplicado por la razón de afinidad K. (Fig. 10)

- Por tanto, si K>0 las dos figuras se encontrarán en lados opuestos del eje, mientras que si K<0 estarán al mismo lado del eje de afinidad.

- Además, si el valor absoluto de K es mayor de la unidad la figura afín será de mayor tamaño que la original, y al contrario si K se encuentra entre la unidad y cero.
- Y por último si K es exactamente igual a la unidad las figuras serán del mismo tamaño y si K=-1 además equivaldrá a una simetría axial donde el eje será el de afinidad.

Los únicos **puntos dobles** en este tipo de homología son los del eje y por tanto no existen rectas límite. Siendo así solo se podrá determinar una homología afín con una de las opciones que será conociendo su eje, la dirección de afinidad y un par de puntos afines o la razón de afinidad.

5. CONCLUSION

Llegado a este punto final y echando la vista atrás, observamos que todas estas transformaciones geométricas tienen una aplicación directa en conceptos más complejos de la geometría descriptiva. Son la base del funcionamiento de los sistemas de representación, pero también de aplicación directa a la hora de resolver procedimientos concretos.

La homología, por un lado:

- tanto en ejercicios de **sistema diédrico** de secciones planas de superficies radiadas como pirámides o conos donde el centro de la homología es el vértice de la figura, los dos planos suelen ser el plano horizontal del diedro y el plano que la secciona y que relacionan dos figuras planas que están contenidas en ellos, la planta del volumen y la sección plana producida.
- y por ejemplo también en **sistema cónico** donde el punto de vista será el centro de homología, los dos planos son el plano del cuadro y el geometral, el eje de homología es la línea de tierra intersección entre ambos y una de las rectas limite es la línea del horizonte donde se encuentran los puntos de fuga de rectas paralelas, es decir, es la recta que determina sus puntos del infinito.

Y la afinidad en **sistema diédrico**:

- A la hora de realizar secciones planas, en este caso de superficies radiadas de generatrices paralelas, como prisas o cilindros, donde precisamente estas generatrices definen la dirección de afinidad.
- Pero también en ejercicios de abatimientos de planos sobre los planos del diedro, donde el eje de afinidad es la traza entre ambos planos y la dirección de afinidad es el recorrido que hacen los puntos al girar en el espacio y que es perpendicular al eje de afinidad.

Pero como ya he comentado en la introducción, esta manera de entender las relaciones geométricas espaciales está íntimamente ligada no solo con el dibujo técnico sino también al mundo del arte. La traslación, relacionada con la repetición modular, la simetría, la rotación, etc… son herramientas básicas de composición artística. Pero además también están fuertemente relacionados al pensamiento matemático científico. Por ejemplo, una traslación o una rotación también son de aplicación en la física mecánica para entender el movimiento de un objeto según un vector determinado.

Por ello creo que resulta fundamental que nuestro alumnado asimile este esquema de pensamiento primero asimilando los conceptos más básicos en los cursos base de la ESO para poder luego aplicarlos con fluidez en los cursos superiores de bachillerato científico-técnico en las materias de dibujo, matemáticas o física, aunque también por ejemplo en temas compositivos que tienen vital importancia para entender el arte en materias del bachillerato de artes como diseño, fundamentos del arte, etc.…

6. ALGUNAS REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y WEBS

- Geometría Descriptiva Tomos 1-5. | F. Javier Rodríguez de Abajo | Ed. Donostiarra, San Sebastián
- Dibujo técnico I 1º Bachillerato – Guía Práctica para el alumno | Joaquín Gonzalo Gonzalo | Ed. Donostiarra, San Sebastián.
- Geometría Descriptiva: Ejercicios resueltos y bibliografía comentada | Juan Carlos Gómez Vargas | Ed. Universidad de Granada, Granada 2016
- Estudio de los sistemas de representación | Julián Giménez Arribas | Prensa Española, Madrid 1966
- Geometría Descriptiva | Fernando Izquierdo Asensi | Ed. Paraninfo, Madrid 1993
- Transformaciones en el plano | Suarez, A.C. | AMCT, Gurabo, Puerto Rico 2010
- El grupo de las isometrías en el plano | Adela Jaime Pastor, Ángel Gutiérrez Rodríguez | Ed. Síntesis 1996
-

IMÁGENES

Figura 1A

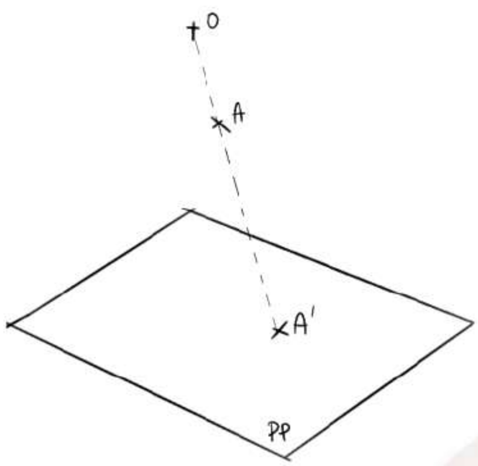

Figura 1B

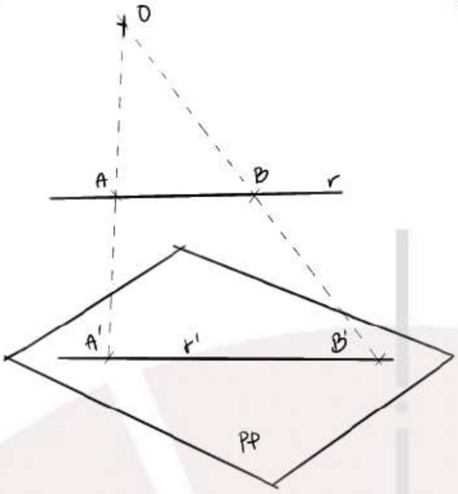

Figura 1C

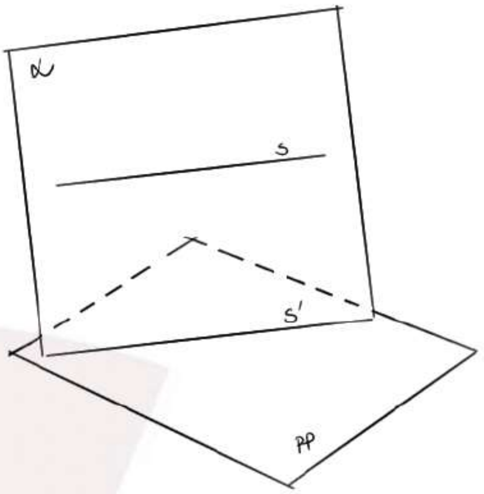

Figura 2

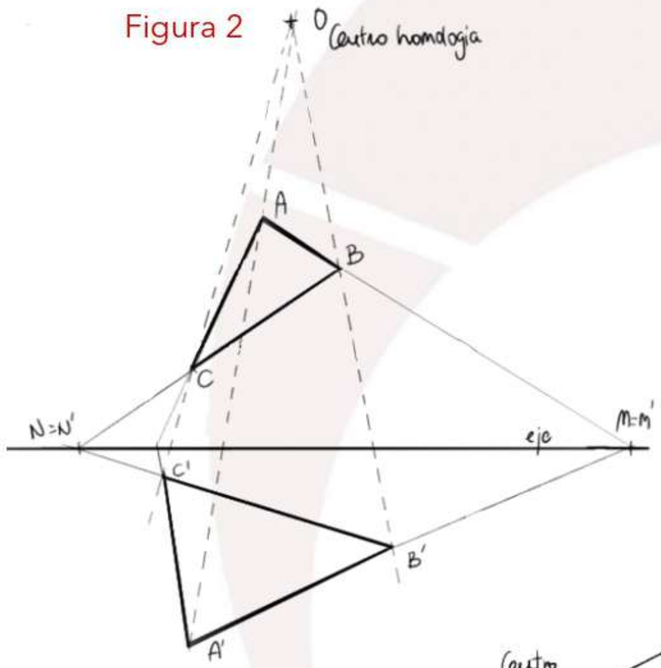

Figura 3

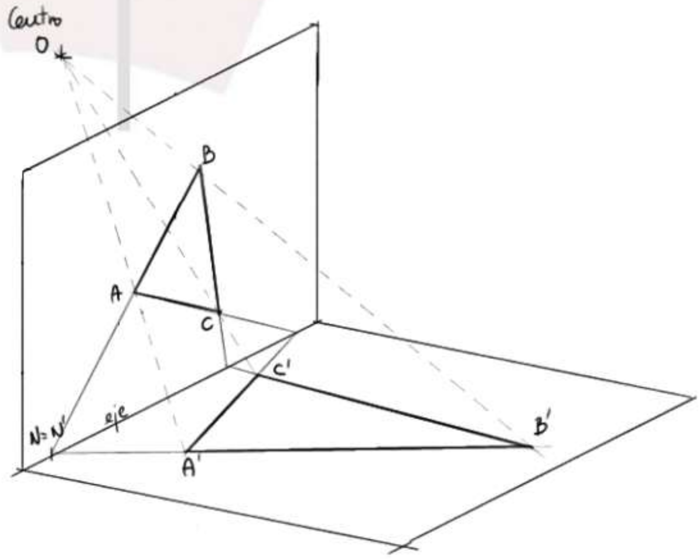

Figura 4

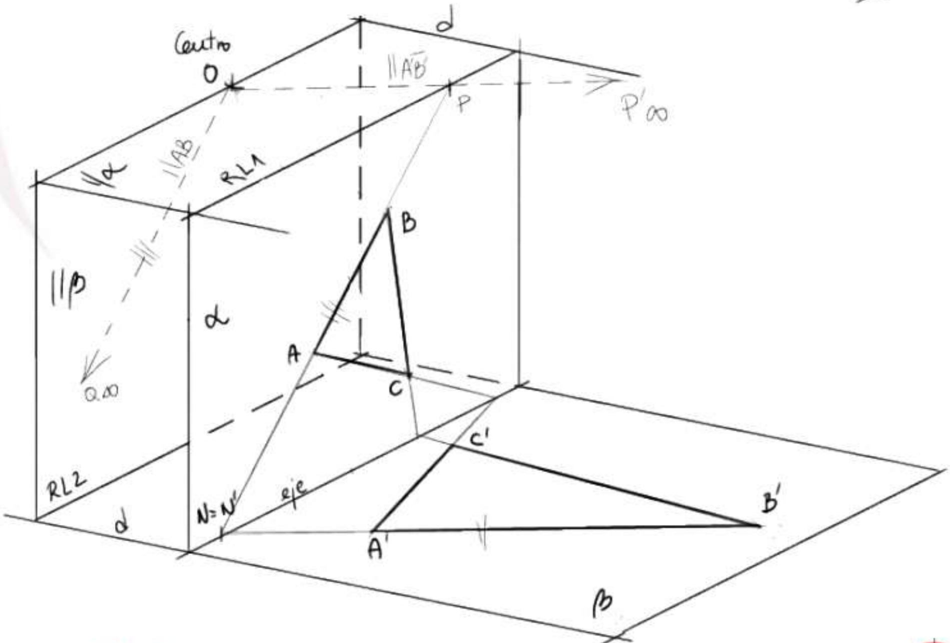

Figura 5

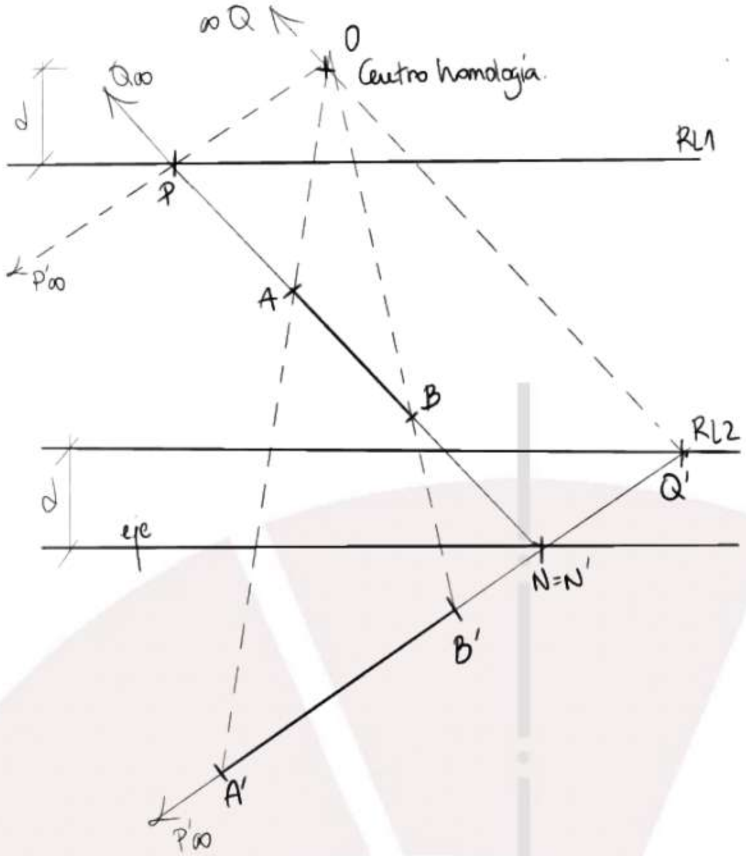

Figura 6

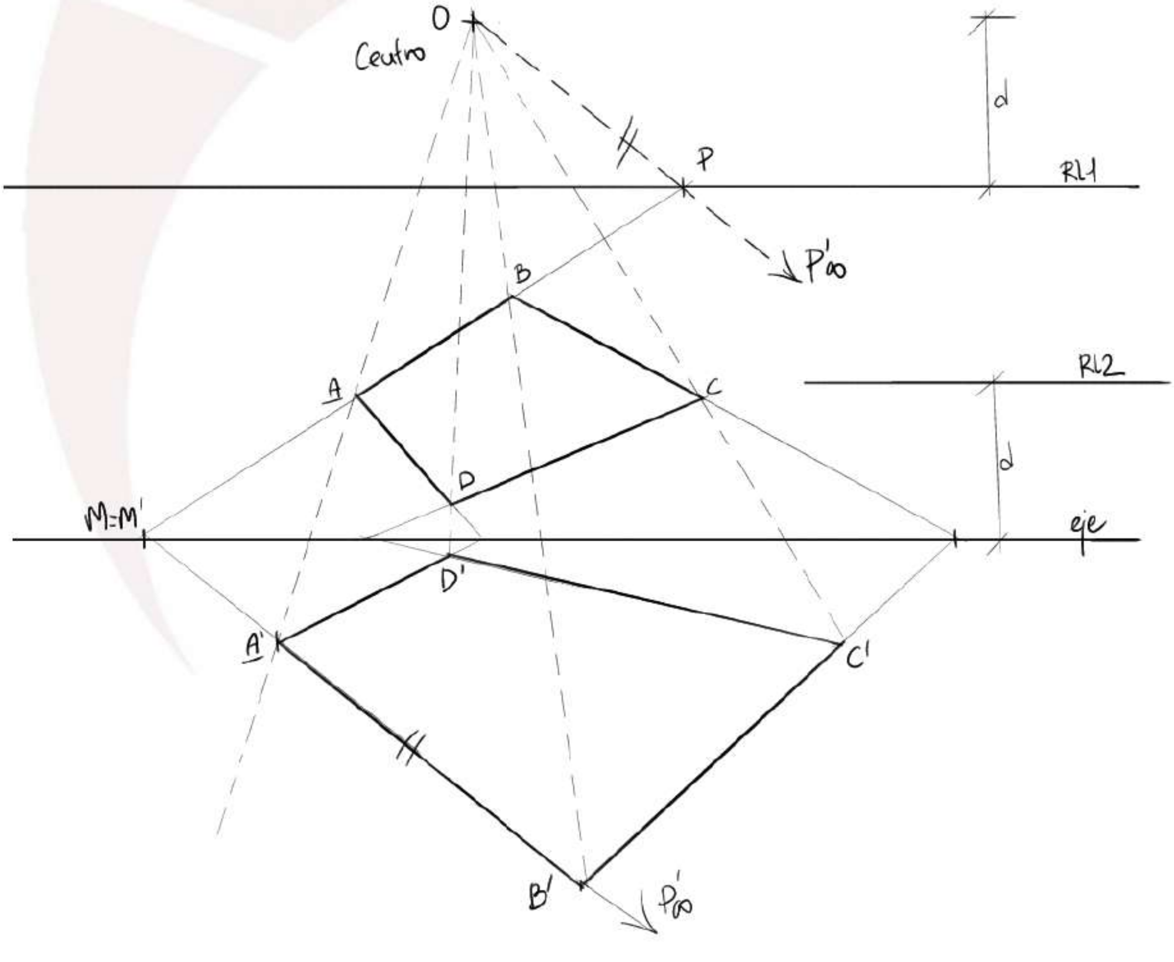

Figura 7

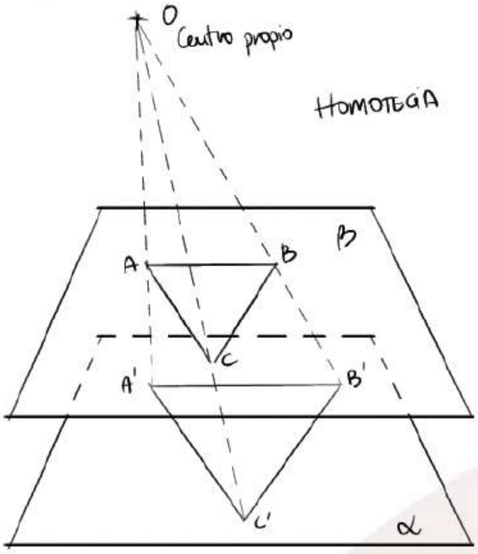

Figura 8

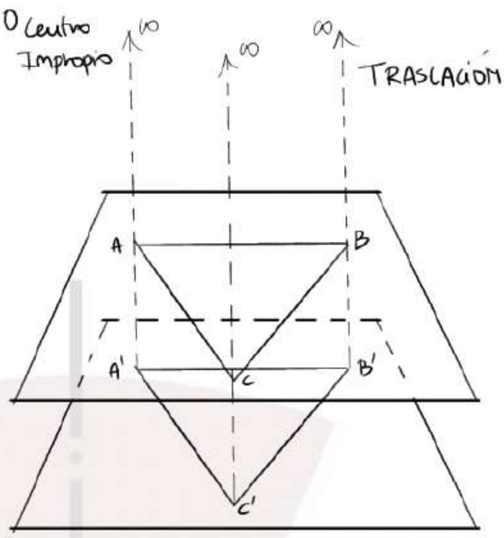

Figura 9

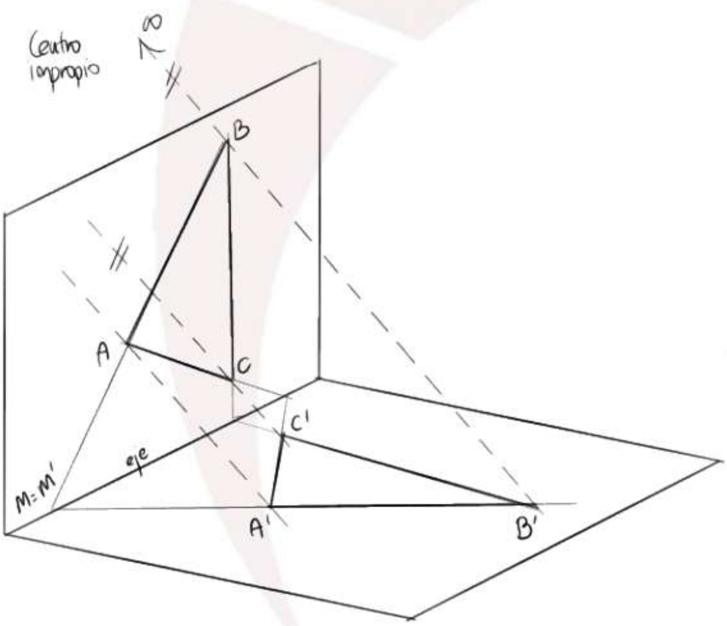

Figura 10