DOVELA academia

TEMA 39 • Curvas cónicas. Curvas técnicas.

Autora: Iria Senra Álvarez

ESQUEMA/ ESTRUCTURA TEMA 39

1. INTRODUCCIÓN

La palabra **geometría** viene de las griegas "geo" =tierra y "metron" =medida, es decir, "medida de la tierra". Y es que precisamente **su estudio surge de la necesidad de egipcios y babilonios de medir y controlar las tierras de cultivo y herencias.** Aun así, fueron los **griegos** como Tales de Mileto, Pitágoras o Euclides, entre otros, los que realmente profundizaron en la **sistematización de su estudio** desde un punto de vista científico y matemático tal y como hoy la entendemos. Sentaron las bases de la geometría plana elemental que se usaría durante siglos hasta nuestros días. Respecto de las curvas vamos a destacar dos nombres en particular, Arquímedes y Apolonio de Perge.

Aunque en sus inicios esta disciplina obedecía, como su nombre lo indica, a la medición en su sentido pragmático, con el paso del tiempo la humanidad comprendió que incluso las abstracciones y representaciones más complejas pueden ser expresadas en términos geométricos. Todas las ramas de estudios científicos, desde las matemáticas más básicas hasta la física más compleja, se pueden acabar asimilando y expresando en términos geométricos y espaciales. Pero también resulta fundamental en temas más creativos como el arte, tanto plástica, como volumétrica, arquitectónica o incluso musical. Por ello es fundamental que nuestro alumnado conozca y maneje con fluidez los términos y los conceptos asociados a la geometría desde lo más básico.

En este tema nos centraremos en describir qué y cuáles son algunas de las curvas más conocidas y de mayor aplicación, en primer lugar las **curvas técnicas** y luego las **curvas cónicas**. Tanto su definición como su trazado.

2. DEFINICIÓN CURVAS

De una manera intuitiva definimos **las líneas** como una sucesión de puntos o la trayectoria de un punto movimiento. Además, las líneas se consideran **rectas** cuando tienen una única dirección y **curvas** cuando ninguna porción de ella es recta.

Si lo que queremos es una **definición más técnica** podemos decir que una curva geométrica es una línea, o sucesión de puntos, que se aleja constantemente de la dirección recta sin formar ángulos, cumpliendo una determinada norma geométrica. Y una determinada norma geométrica define un determinado tipo de curva. Nosotros en primer lugar vamos a diferencias las **curvas técnicas de las cónicas**.

Las primeras están formadas por una **sucesión de arcos de circunferencia tangentes entre sí** y que a su vez pueden ser cerradas como los óvalos y ovoides, o abiertas como las espirales. Al estar formadas por arcos de circunferencia podremos establecer métodos para dibujarlas utilizando el compás y por tanto su trazado es preciso.

Y las curvas cónicas por el contrario no se pueden dibujar con herramientas de dibujo y los métodos consistirán en definir una sucesión de puntos de la curva lo suficientemente cercanos para luego poder trazar la curva uniéndolos a mano alzada. Cuantos más puntos, mayor definición.

Estas **curvas se llaman cónicas** por que **surgen del corte realizado por un plano secante a una superficie cónica**. Estas superficies radiadas se forman por el movimiento de una recta llamada generatriz que se apoya en un punto propio llamado vértice y a su vez en una curva directriz. Para simplificarlo nosotros partiremos de que esa curva es una circunferencia y por tanto el cono resultante es de trayectoria circular. El eje de esta superficie es una recta imaginaria que une el vértice con el centro geométrico de esa circunferencia.

Las diferentes superficies cónicas, elipse, hipérbola o parábola, surgen **dependiendo del ángulo que mantenga el plano secante respecto de su eje y/o de sus generatrices**.

3. LAS CURVAS TÉCNICAS

Vamos a explicar en primer lugar qué características diferencian a las distintas curvas técnicas y cómo podemos proceder para su trazado dependiendo de los datos que nos sean facilitados.

3.1. ÓVALOS

En primer lugar, hablaremos de los óvalos. Estas son curvas cerradas y planas compuestas por **un número par de circunferencias**, mínimo cuatro, **enlazados entre sí y simétricos respecto a dos ejes**, uno mayor y otro menor y que son **perpendiculares entre sí.**

A continuación, explicaremos como trazar un **óvalo de 4 centros en tres casos diferentes**: si se nos facilita solamente la dimensión del eje mayor, solo el eje menor o si se nos facilitan ambos.

Es importante aclarar que para definir completamente cualquier curva técnica no solo hay que definir sus centros y las curvas que lo forman, sino también los puntos de tangencia entre ellas. Estos surgirán siempre de unir los centros de las circunferencias tangentes entre sí, por ser esta una propiedad intrínseca de las tangencias. *Dos circunferencias tangentes tienen alineados sus centros y estos con el punto de tangencia. Por tanto, la distancia entre centros es la suma de los radios de ambas circunferencias.*

- Si lo que se nos facilita es el **eje mayor** (Fig.1A) como un segmento AB el primer paso será dividir el segmento en 3 partes iguales. Para hacerlo de forma geométrica podremos utilizar el teorema de Tales basado en la proporcionalidad entre triángulos semejantes.

  Los vértices intermedios de los segmentos serán los centros de las dos circunferencias que pasan por los extremos. Y los puntos donde estas circunferencias corten a la mediatriz del eje mayor, es decir, al eje menor, serán los otros dos centros.

  Si unimos los centros dos a dos definiremos claramente los 4 puntos de tangencia entre los 4 arcos de circunferencia.

- Si por el contrario lo que se nos facilita es el segmento que define **el eje menor** AB (Fig.1B) sus vértices coincidirán con los centros de las circunferencias que pasan por el vértice opuesto. Es decir, A será el centro del arco de circunferencia de radio AB y viceversa.

Dibujaremos a continuación la mediatriz del eje menor que se corresponderá con el mayor y definiremos sobre él los otros dos centros trazando desde los extremos A y B rectas que formen 45º con el eje menor y que además nos definirán los 4 puntos de tangencia sobre las circunferencias anteriormente trazadas estableciendo así también los radios de los dos arcos de circunferencia finales.

- Y, por último, en el caso de que lo que nos proporcionen sea la combinación de los **dos ejes**, mayor AB y menor CD, (Fig.1C) en primer lugar trazaremos el segmento que une dos vértices de ambos ejes consecutivos, por ejemplo AC y un arco de circunferencia con centro en el centro del óvalo, el cruce de ambos ejes, y de radio el semieje menor. Es decir, pasará por A y a su vez cortará a la prolongación del eje menor en un punto que llamaremos Y.

  Lo siguiente será trazar otro arco auxiliar con centro en el extremo C y radio definido por este punto Y, es decir, CY, hasta que corte al segmento anteriormente trazado AC en un punto que llamaremos X.

  Pues bien, la mediatriz del segmento AX será la recta que une los centros de dos arcos de circunferencia del óvalo, uno sobre el eje mayor y otro sobre el menor, y por tanto también uno de los puntos de tangencia.

  Basándonos en la simetría del óvalo y conociendo sus dos ejes de simetría podremos hallar los demás y acabar de definir así la totalidad de la curva.

3.2. OVOIDES

Los **ovoides** son otro tipo de curvas técnicas. Estas se definen como curvas cerradas y planas definidas por **cuatro arcos de circunferencia** tangentes entre sí, **dos de ellos de igual radio y otros dos de diferente radio**, de los cuales uno es **una semicircunferencia**. Al diámetro de esta, lo llamamos también **diámetro del ovoide** y sobre él se sitúan los centros de los dos arcos iguales. Estas curvas tienen **un solo eje de simetría** sobre el que se sitúan los otros dos centros.

Al igual que con los óvalos, veremos **tres situaciones diferentes para el trazado** de los ovoides según los datos que nos son facilitados.

- En primer lugar, si lo que nos proporcionan es el segmento que **define el eje del ovoide** AB (Fig.2A), dividiremos este en 5 partes iguales. De estas divisiones el extremo de la segunda desde A será el centro de la semicircunferencia y por tanto por el podremos también trazar el diámetro.

  La primera división desde el otro extremo del eje, B, será el centro del arco opuesto a la semicircunferencia.

  Los otros dos centros los hallaremos sobre el diámetro del ovoide intersecándolo con un arco auxiliar con centro en el centro de este y con radio hasta el punto B.

  Solo nos faltaría determinar los 4 puntos de tangencia en la intersección de cada arco con la recta que une los centros dos a dos.

- Si por el contrario se nos facilita **el diámetro** (Fig.2B) trazaremos primeramente su mediatriz para definir el eje. Con centro en el punto medio del diámetro podremos trazar la semicircunferencia. Y además en la intersección con el eje de la otra mitad de la semicircunferencia determinaremos el centro del arco opuesto a esta.

  Los extremos del diámetro serán los centros de los arcos de circunferencia desiguales y por tanto uniendo estos con el anterior centro dibujaremos la recta que determina los puntos de tangencia.

- Y el último caso sería cuando nos faciliten **tanto el eje como el diámetro** (Fig.2C). El primer paso será dibujar el eje mayor y el diámetro cruzándose en el centro de la semicircunferencia, es decir, a una distancia igual a la mitad del diámetro desde uno de los extremos del eje.

  Para determinar los otros centros necesitamos realizar una serie de trazados. El primero determinar el segmento que resulta de restar el diámetro al eje mayor. Este segmento a su vez se lo restaremos al segmento definido por uno de los vértices del diámetro y el extremo del eje opuesto a la semicircunferencia.

  Pues bien, la mediatriz del segmento que acabamos de dibujar nos determinará en su intersección con el eje mayor uno de los centros, y en la intersección con la prolongación del diámetro el de uno de los arcos iguales. El del arco opuesto lo determinaremos por simetría también sobre el diámetro.

  Además, esta recta y su simétrica, al unir ambos centros, determinará también los puntos de tangencia.

3.3. ESPIRALES

Por último, definiremos **las espirales** como unas curvas abiertas y planas engendradas por uno punto que se desplaza uniformemente a lo largo de una recta mientras está va girando alrededor de uno de sus extremos.

Es decir, sería la trayectoria definida por un punto A que se va desplazando de sí mismo hasta otro punto B mientras además va girando con centro en él mismo. A la distancia que recorre en sentido longitudinal en una vuelta completa, es decir, al segmento AB, lo llamaremos **paso**; y **espira** al fragmento de curva que describe el punto en una vuelta completa. (Fig.3A)

Las espirales **no siempre son curvas técnicas** porque no siempre se pueden trazar por la unión de circunferencias tangentes entre sí, como el caso de la **espiral de Arquímedes** (Fig.3B), que se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto a velocidad angular constante. Se traza dividiendo una circunferencia tanto radialmente como angularmente n veces y numerándolos, haciendo coincidir la última división de la circunferencia con el radio mayor. Con todo numerado comenzamos el trazado en el centro y avanzamos una a una con las intersecciones del mismo nombre a mano alzada.

Si bien existen más, nosotros plantearemos **dos casos de espirales que si son curvas técnicas.**

Primeramente, la **espiral de dos centros** conocido su paso p(Fig.3C). Esta curva surge del trazado de **semicircunferencias cuyos centros se irán alternando entre los dados y cuyo radio va aumentando siempre el paso**. Es decir, la primera semicircunferencia tendrá como centro O_1 y radio la distancia entre los dos centros y se dibujará hasta cortar el eje que une ambos centros. La segunda tendrá su centro en O_2 y el radio crecerá la distancia del paso, y la tercera alternará al centro O_1 y su radio crecerá la misma distancia y así sucesivamente.

En segundo lugar, definimos **la espiral de Durero o aurea** (Fig.3D), ampliamente presente en la naturaleza y en el arte por sus especiales proporciones. Se trata de una espiral logarítmica en la que los radios de dos arcos consecutivos se relacionan mediante la proporción aurea. Es decir, la razón de crecimiento es $\mu = 1.618$.

Para dibujarla podemos partir de un rectángulo áureo, ya que cualquier tramo completo de la espiral estará encajada en uno. De este rectángulo dibujaremos el cuadrado interno cuyo lado se corresponda con su lado menor obteniendo, así como figura restante otro rectángulo áureo con el que haremos el mismo procedimiento y así consecutivamente.

Una vez tengamos las divisiones deseadas, trazaremos la curva uniendo los vértices opuestos de cada cuadrado tomando como centro de la circunferencia uno de los vértices intermedios.

4. CURVAS CÓNICAS

Como ya avanzamos en la introducción, las **curvas cónicas** son el resultado de la sección producida por un plano secante en una superficie cónica y según la posición relativa del plano y el cono, se obtienen **tres curvas cónicas diferentes** (Fig. 4 y 5):

- **La elipse** surge cuando el plano es oblicuo respecto del eje del cono y además corta a todas sus generatrices y no pasa por el vértice.
- **La parábola** cuando el plano es paralelo a una de las generatrices
- Y **la hipérbola** cuando el plano es paralelo al eje del cono o a dos generatrices.
- Aunque en realidad también podríamos contar a **la circunferencia** como una cuarta curva cónica que surgiría cuando el plano es perpendicular al eje.

4.1. ELEMENTOS FUNDAMENTALES

A continuación, vamos a definir los **elementos fundamentales que comparten estas curvas** y que resultan esenciales para definirlas y trabajar con cada una de ellas (Fig.6).

En primer lugar, los **focos** que son unos puntos particulares respecto a los cuales los puntos de las curvas mantienen una relación constante que varía en cada una de ellas, y que son importantísimos para definirlas, para trazarlas y para entenderlas desde un punto matemático. La elipse y la hipérbola tienen dos focos, mientras que la parábola tiene solamente uno.

Además, y según el **teorema de Dandelin**, los focos se encuentran en los puntos de tangencia del plano secante con dos esferas que están inscritas en la superficie cónica y son además tangentes a dicho plano.

Llamamos **radios vectores** a los segmentos que surgen de unir cada punto de la curva con sus focos.

Definiremos a continuación la **circunferencia principal,** aquella cuyo centro coincide con el de la curva y su diámetro es igual a la longitud entre sus vértices, es decir, la distancia entre los extremos de su eje. Y las **circunferencias focales** son aquellas con centro en los focos y radio la distancia entre los vértices.

Por otro lado, los **planos de contacto** son aquellos que pasan por los puntos de tangencia de las esferas definidas en el teorema de Dandelin con la superficie del cono y que además son perpendiculares al eje de este.

Estos nos sirven para determinar las **directrices** que son las rectas que surgen de intersecar ambos planos con el plano secante. La elipse y la hipérbola tienen dos y la parábola uno. A la relación constante que existe entre las directrices y su foco correspondiente la llamamos **excentricidad** y se expresa mediante la división de la distancia de un punto cualquiera de la curva P al foco F y de la distancia de ese punto a la directriz D. Es decir, PF / PD = razón constante que denominaremos ε.

En el caso de la elipse $\varepsilon<1$, en la parábola es igual a 1 y en la hipérbola es mayor que 1. La circunferencia no tiene excentricidad o es igual a 0 ya que no tiene directrices al ser el plano secante paralelo a los planos de contacto.

Definiremos a continuación a cada una de las curvas basándonos en su relación con los focos, ya que está será en la que nos basaremos para realizar su trazado. Los diversos métodos de trazado que existen para cada una de las curvas consisten siempre en determinar el mayor número de puntos posibles de la curva y unirlos a continuación a mano alzada.

4.2. ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de radios vectores es constante e igual al eje mayor. Esta curva tiene **dos ejes de simetría**, el mayor o real y el eje menor o imaginario, y **dos focos** que se encuentran sobre el eje mayor.

Existen diferentes métodos para su trazado dependiendo de los datos facilitados, pero nosotros nos centraremos en el supuesto de **conocer sus dos ejes** o **también dos de sus diámetros conjugados**, ya que en la práctica son los más usados, por ejemplo para dibujar las proyecciones en sistema diédrico de circunferencias que no se sitúan en paralelo a los planos de proyección, o en cualquier caso en sistema isométrico.

Si nos **facilitan sus dos ejes** los dos métodos más usados consisten en primer lugar en **aplicar directamente la definición de la curva.** (Fig.7) Es decir, aplicar la lógica e ir determinando puntos cuya suma de radio vectores sea igual al eje mayor. Para ello dividimos al eje mayor en dos partes de medida aleatoria y que por tanto serán radio vectores de puntos de la elipse. Con esos radios trazaremos arcos desde cada uno de los focos y al cruzarse determinarán esos puntos. Es decir, si el eje mayor es un segmento AB y marcamos sobre él un punto 1, definiremos un punto P de la curva como el cruce de dos arcos de circunferencia cuyo radio sea A1 y B1 y centro en cada uno de los focos. Por tanto, FP + F'P= A1 + B1 = AB, es decir la longitud del eje mayor

También es habitual en este caso determinar los puntos basándose en la **relación de afinidad** que existe entre la curva y las dos circunferencias que comparten centro y cuyos diámetros son iguales a los ejes de la elipse. (Fig.8) Para ello trazamos varios diámetros que corten a ambas circunferencias. Esos puntos de intersección serán los afines a ambas circunferencias y a la elipse. Los puntos de esta por tanto podremos determinarlos por la intersección de los rayos proyectivos normales al eje mayor, para los puntos de la circunferencia mayor, y normales al eje menor para los puntos de la circunferencia menor.

Es muy habitual también tener que realizar el trazado de una elipse dados **dos diámetros conjugados**. Llamamos diámetro a cualquier cuerda de la elipse que pase por su centro y los consideramos conjugados cuando cada uno de ellos divide en dos partes iguales a las cuerdas de la elipse trazadas paralelas al otro. Los ejes son los únicos diámetros conjugados normales entre sí.

Si bien a partir de dos diámetros conjugados podríamos definir los ejes aplicando el teorema de Mannheim, es mucho más habitual por su inmediatez realizar el trazado basándose en la **relación de afinidad** entre la elipse y la circunferencia construida sobre el diámetro conjugado mayor, que será el eje de la afinidad (Fig.9). Como los diámetros conjugados son diámetros perpendiculares en la circunferencia afín, la dirección de afinidad será la determinada por la recta que une un extremo del diámetro conjugado menor con un extremo del diámetro de la circunferencia perpendicular al eje. Luego, mediante cuerdas paralelas a estos diámetros y el trazado de sus afines se van obteniendo los puntos.

4.3. HIPÉRBOLA

A continuación, definiremos **la hipérbola** como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de radio vectores es constante e igual al eje real. Esta curva tiene **dos ejes de simetría**. Uno que llamaremos real o principal y sobre el que se sitúan los **dos focos** que definen la curva, y otro que llamamos imaginario. (Fig.10A)

En relación con esta curva existen otras dos rectas singulares que se llaman **asíntotas.** Son dos rectas tangentes a la curva en los puntos del infinito, lo que quiere decir que se acercan indefinidamente a la curva, pero nunca llegan a cortarla. Son simétricas respecto a los ejes y pasan por su centro, es decir, el cruce de los dos ejes.

Para realizar **el trazado de puntos que pertenezcan a la curva** (Fig.10B), al igual que con la elipse, aplicamos gráficamente su definición. Tomamos un punto 1 aleatorio a partir de uno de sus extremos, por ejemplo A, y realizamos arcos de circunferencia de radio A1 y A'1 desde los focos opuestos al segmento tomado como radio para así hallar un punto P de la curva cuya diferencia de radio vectores sea igual a P. Esto es FP – F'P= A1 – A'1 = AA'

4.4. PARABOLA

Y por último definimos la **parábola** como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de su único foco y de una recta fija, que será la **directriz** de la curva. Las parábolas tienen **un solo eje** de simetría que es perpendicular a la directriz. Además, llamamos **vértice** al punto extremo del eje y de la curva y que lógicamente, por pertenecer a la curva, se situará en el punto medio entre el foco y la directriz.

Para su trazado, igual que en los casos anteriores, recurrimos a su propia definición hallando puntos que equidisten del foco y de la directriz. Para ello tomamos un punto aleatorio 1 sobre el eje , trazamos por él una recta paralela a la directriz y tomamos la distancia que lo separa de esta como radio de un arco de circunferencia con centro en el foco. Donde se corten ambos por tanto el punto tendrá la misma distancia tanto de la directriz como del foco y pertenecerá a la curva.

5. CONCLUSION

Durante este tema hemos desarrollado conceptos básicos de geometría plana en relacion a estas curvas tan particulares y que tienen una aplicación directa en otros aspectos del dibujo técnico.

Por ejemplo, muchas veces se ha considerado el óvalo como una forma eficaz y rápida de representar las proyecciones de la circunferencia en sistema isométrico. Ahora bien, la elipse es en realidad la forma real de dibujarla, tanto en este sistema como en sistema diédrico. En este sistema la representaremos muchas veces a partir de sus ejes, pero también a partir de sus diámetros conjugados dependiendo de la información de la que se parta.

Ahora bien, estas curvas no so lo tiene aplicación en el dibujo, si no que su entendimiento gráfico y espacial puede ayudar y mucho a que los alumnos/as desarrollen el pensamiento matemático y entender por ejemplo aplicaciones en la física, la astronomía, o el diseño, la estética y armonía en el arte de estas curvas. Pensemos por ejemplo que la elipse es la trayectoria que describen los planetas en órbita, o define la forma de galaxias; la parábola es la trayectoria que describe un objeto al ser lanzado; la hipérbola la trayectoria de partículas en campos magnéticos; o el óvalo es la forma de la cúpula del Panteón de Roma.

Por ello creo que resulta fundamental que nuestro alumnado asimile este esquema de pensamiento primero asimilando los conceptos más básicos en los cursos base de la ESO para poder luego aplicarlos con fluidez en los cursos superiores de bachillerato científico-técnico en las materias de dibujo, matemáticas o física, aunque también por ejemplo en temas compositivos que tienen vital importancia para entender el arte en materias del bachillerato de artes como diseño, fundamentos del arte, etc.…

6. ALGUNAS REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y WEBS

- Dibujo técnico I 1º y 2 Bachillerato – Guía Práctica para el alumno | Joaquín Gonzalo Gonzalo | Ed. Donostiarra, San Sebastián.
- Geometría Descriptiva: Ejercicios resueltos y bibliografía comentada | Juan Carlos Gómez Vargas | Ed. Universidad de Granada, Granada 2016
- Geometría Descriptiva | Fernando Izquierdo Asensi | Ed. Paraninfo, Madrid 1993
- https://dibujotecni.com/category/geometria-plana/construcciones/curvas/

IMÁGENES

Figura 1 A

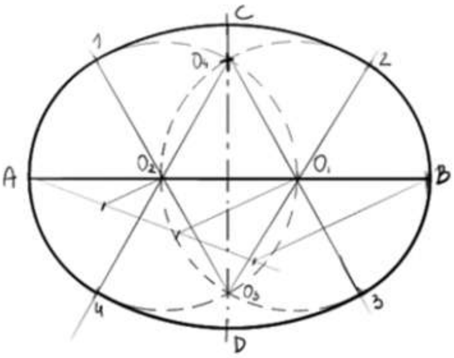

Figura 1B

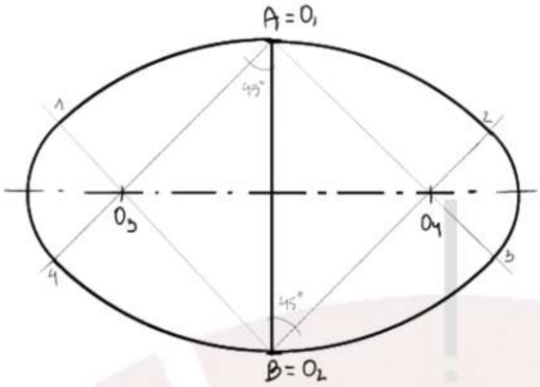

Figura 1C

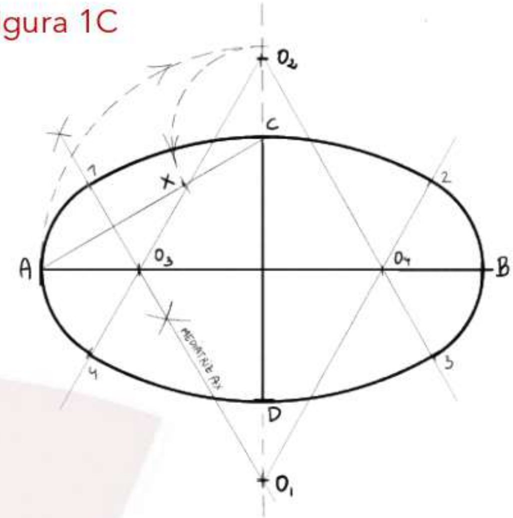

Figura 2 A

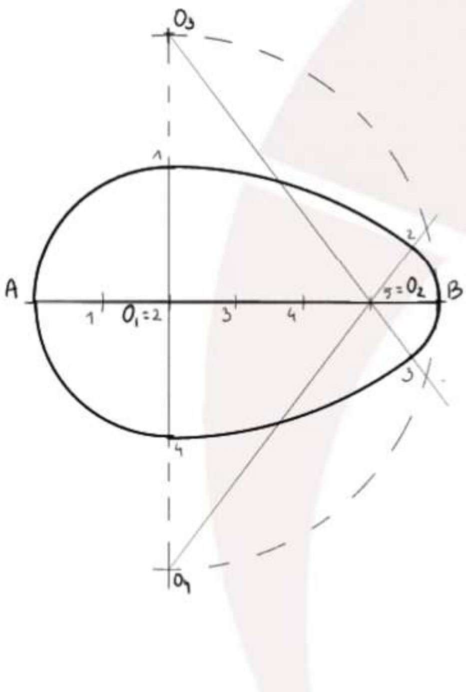

Figura 2B

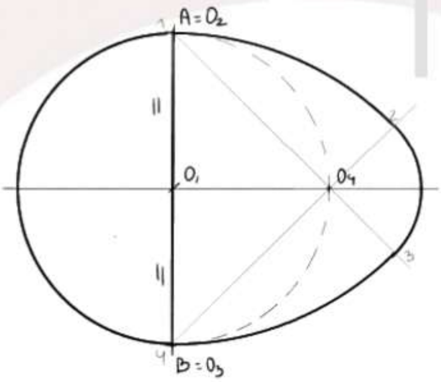

Figura 2C

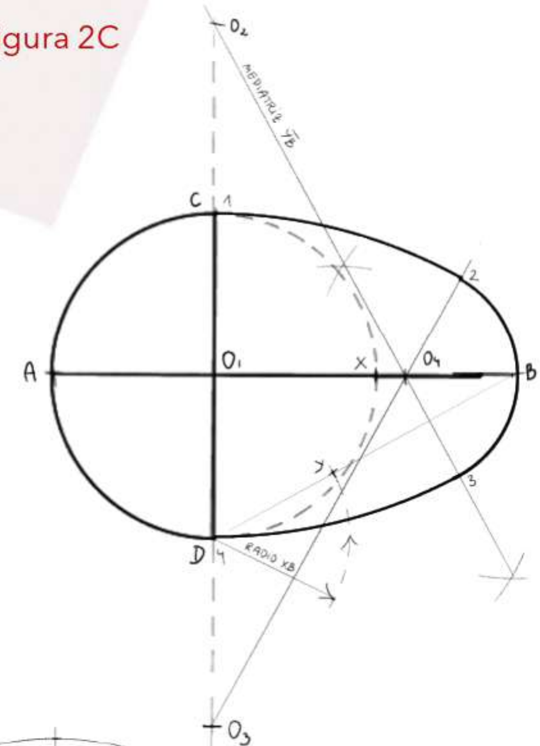

Figura 3 A

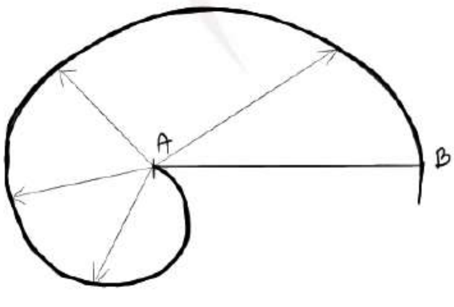

Figura 3 B

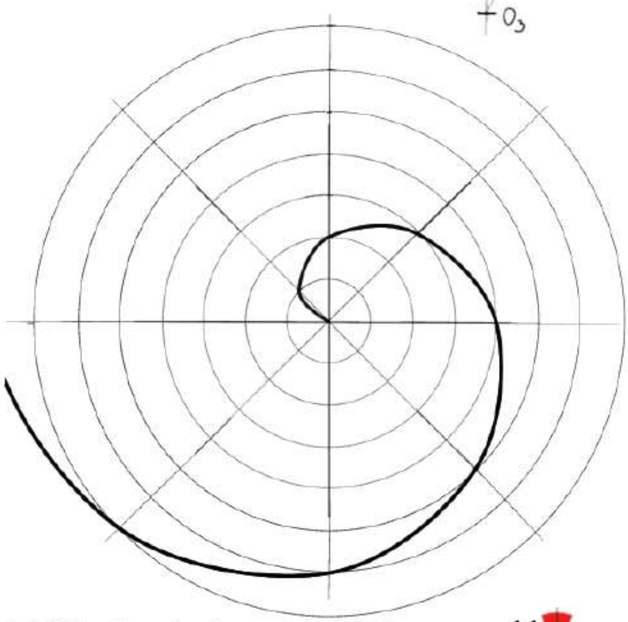

Figura 3C

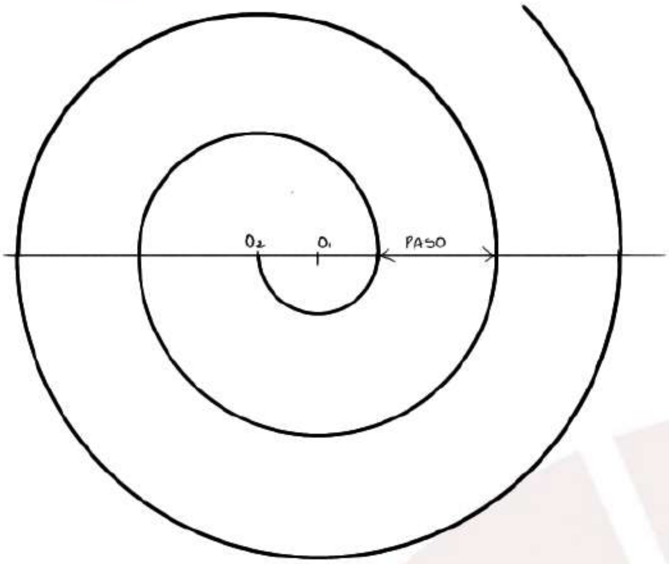

Figura 3 D

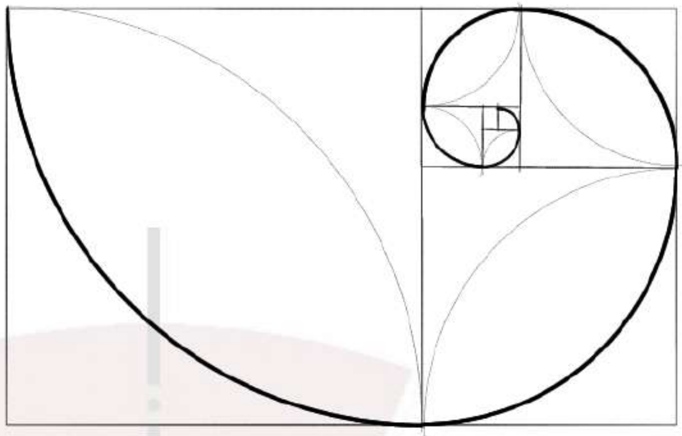

Figura 4

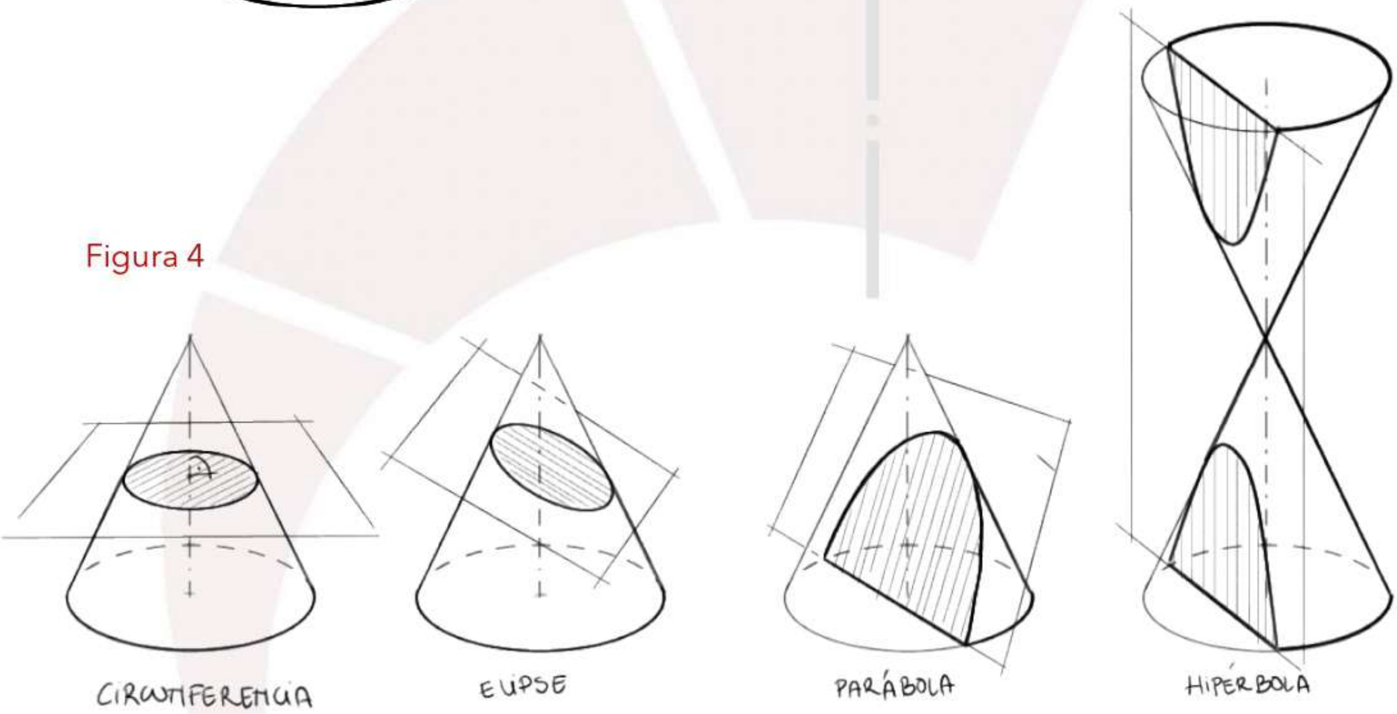

Figura 5

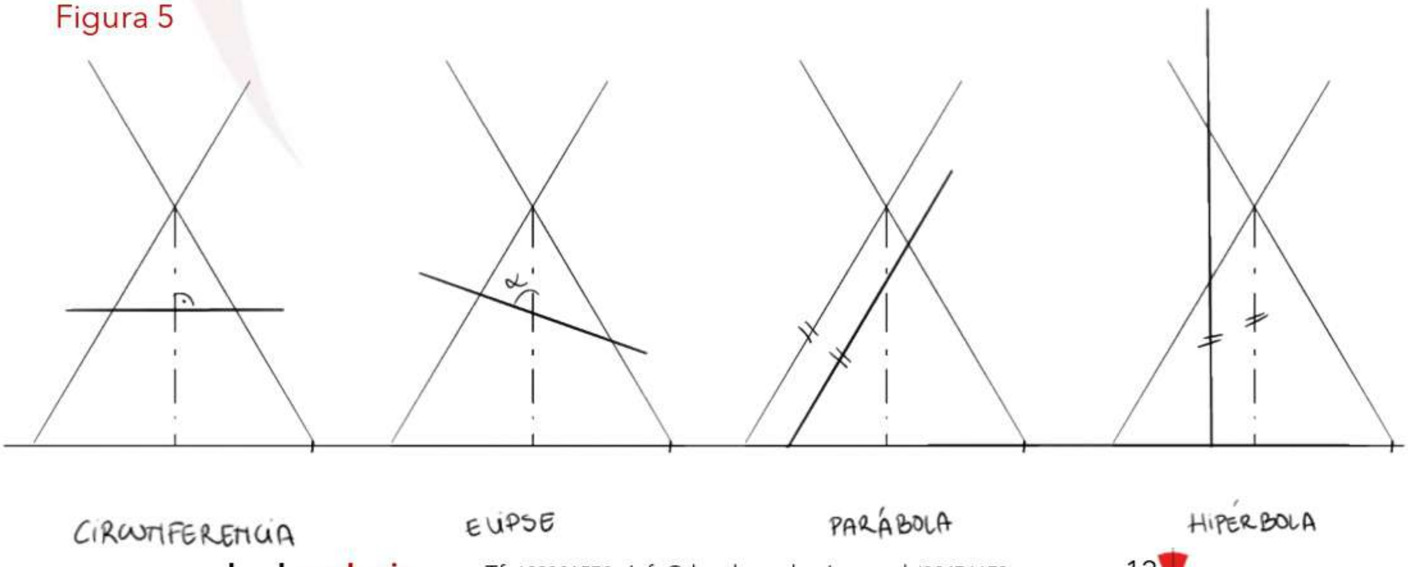

Figura 6

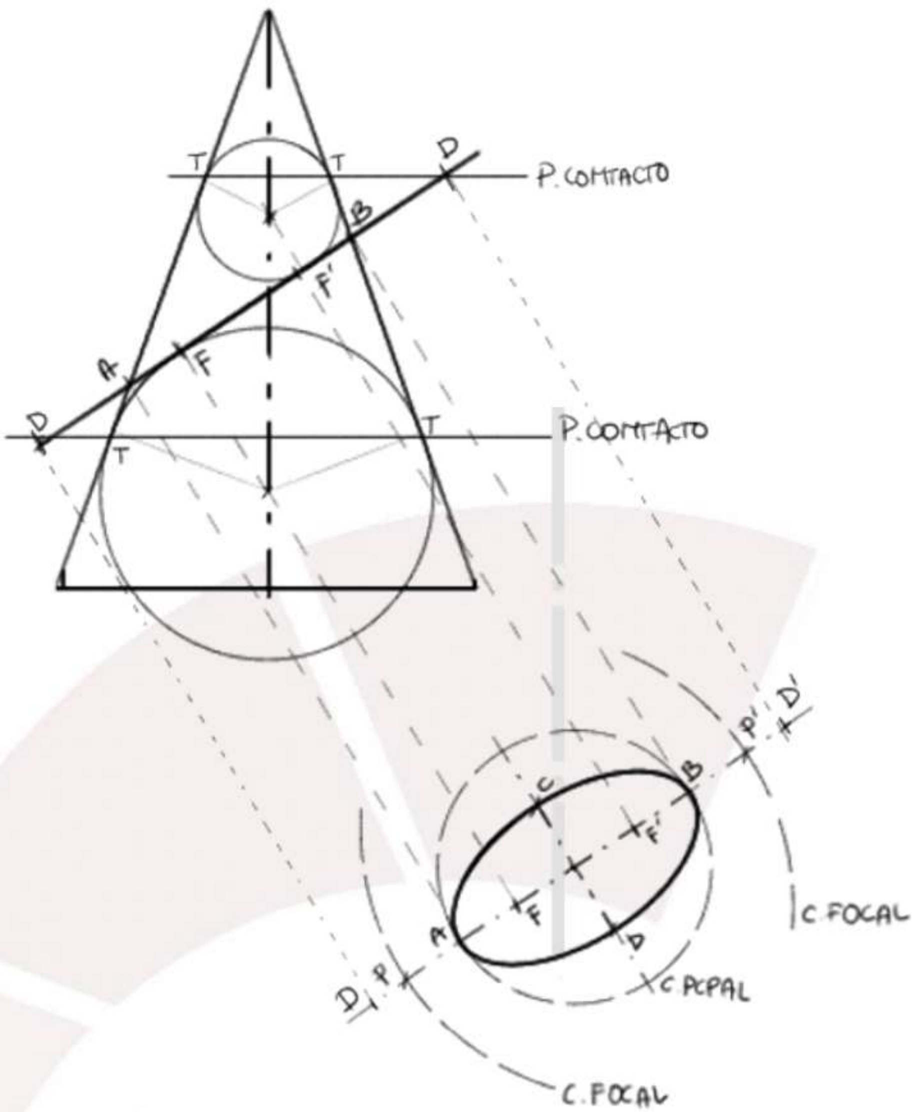

Figura 7

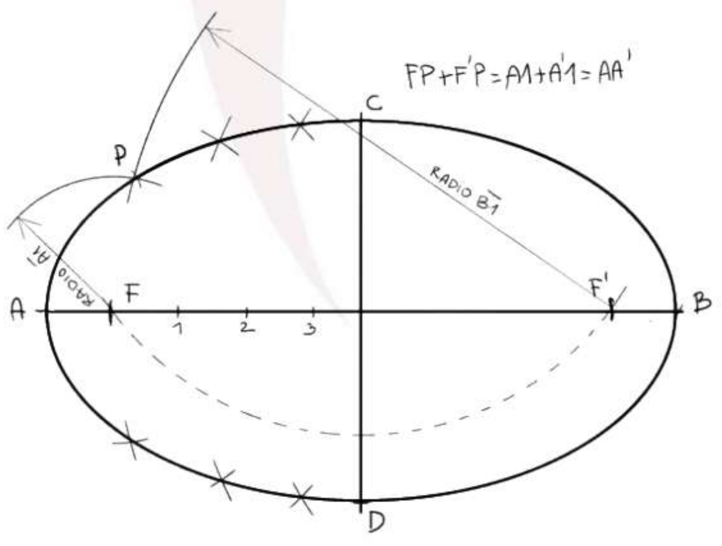

Figura 8

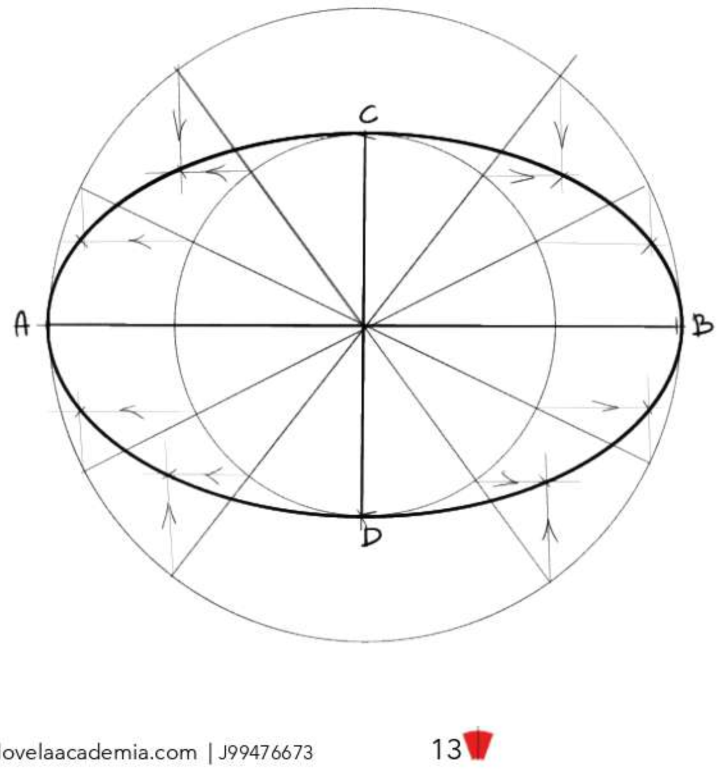

Figura 9

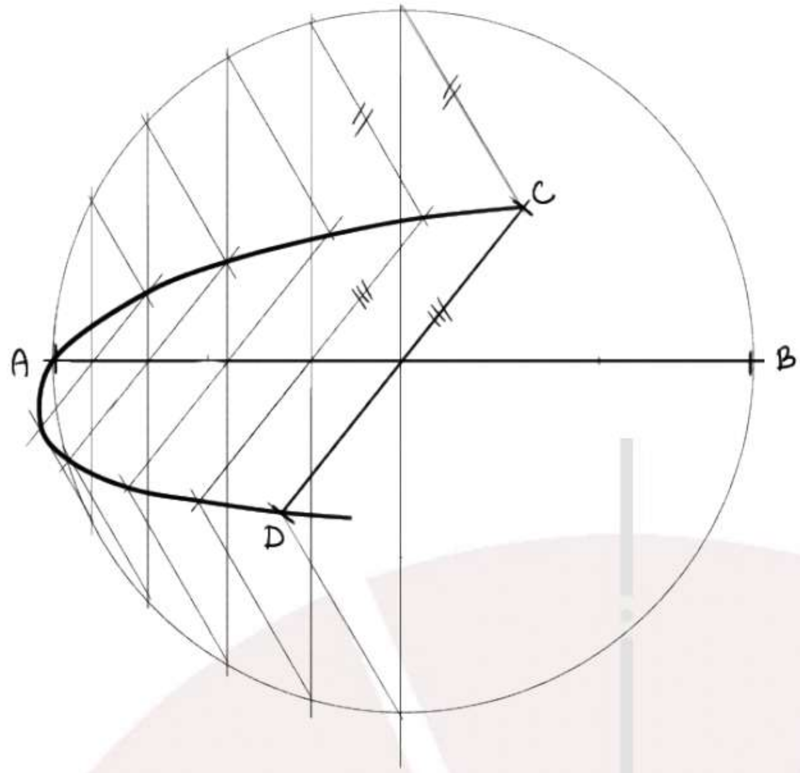

Figura 10

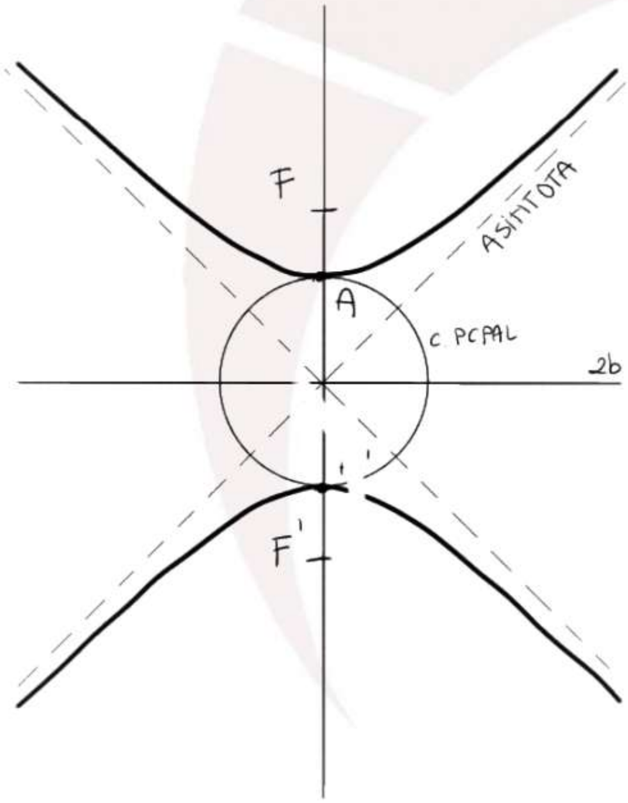

Figura 11

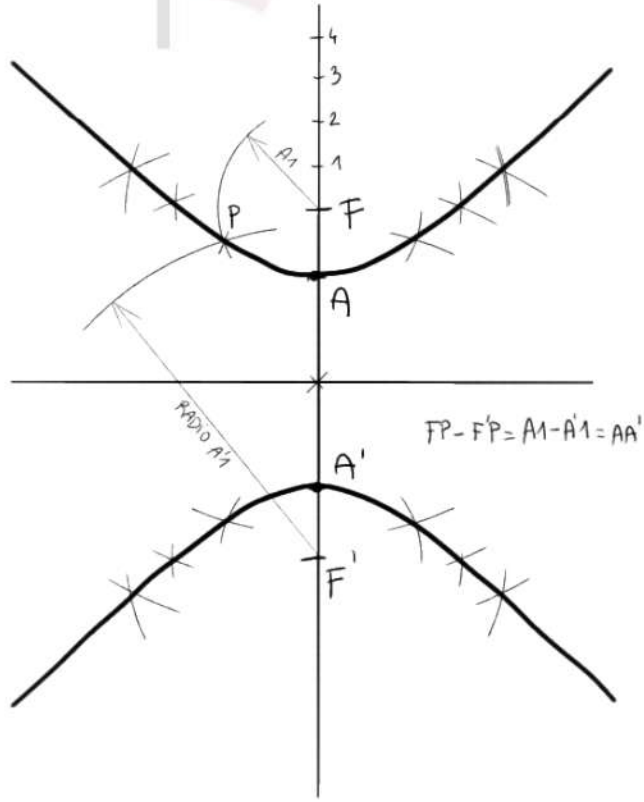

Figura 12

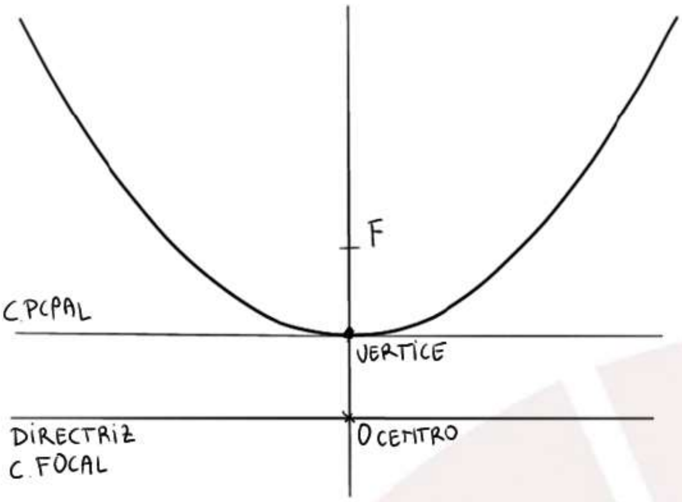

Figura 13