

Tangencias y Enlaces.

Aplicaciones

1. INTRODUCCIÓN

2. CONCEPTO DE TANGENCIA

Definición y posiciones relativas

Propiedades fundamentales

Lugares geométricos

3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

Trazados básicos

Trazados por lugares geométricos

Trazados por dilataciones

Trazados por homotecia

Trazados por potencia

Trazados por inversión

4. LOS 10 CASOS DE APOLONIO

5. ENLACES Y APLICACIONES

6. CONCLUSION

1. INTRODUCCIÓN

- **SITUACIÓN GENERAL :**
 - ✓ **situar la geometría plana en la historia.**
 - ✓ **situar la importancia de la geometría plana para el alumnado: entender conceptos matemáticos, espaciales, física,... pero también arte, creatividad,...**
- **DESCRIBIMOS COMO VAMOS A DESARROLLAR EL TEMA**
Importante en este tema

2. CONCEPTO DE TANGENCIAS

DEFINICIÓN

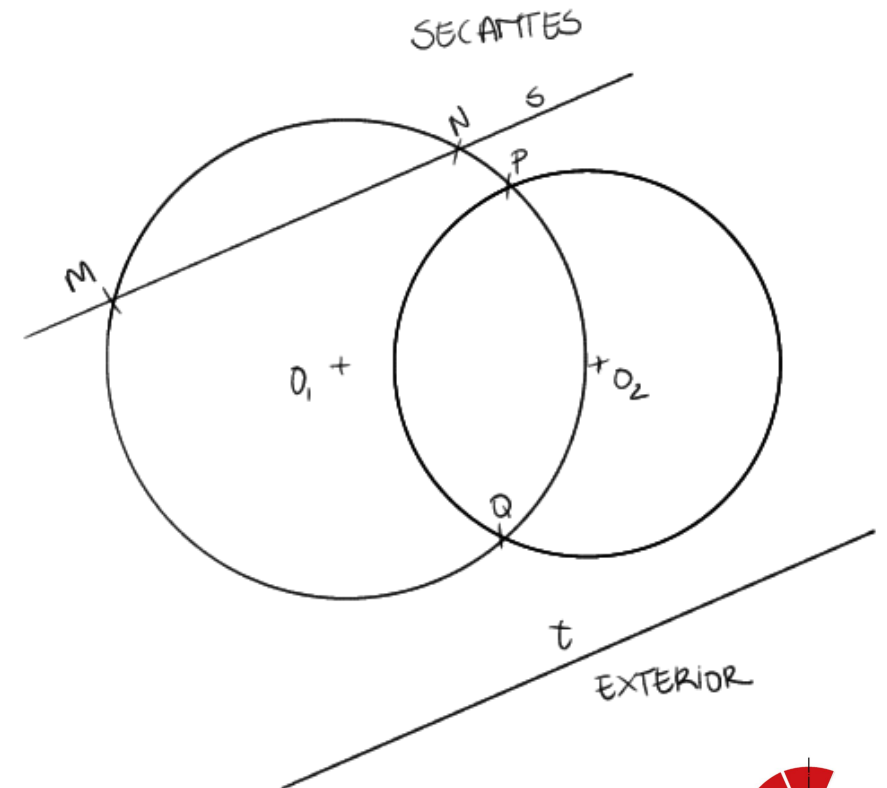
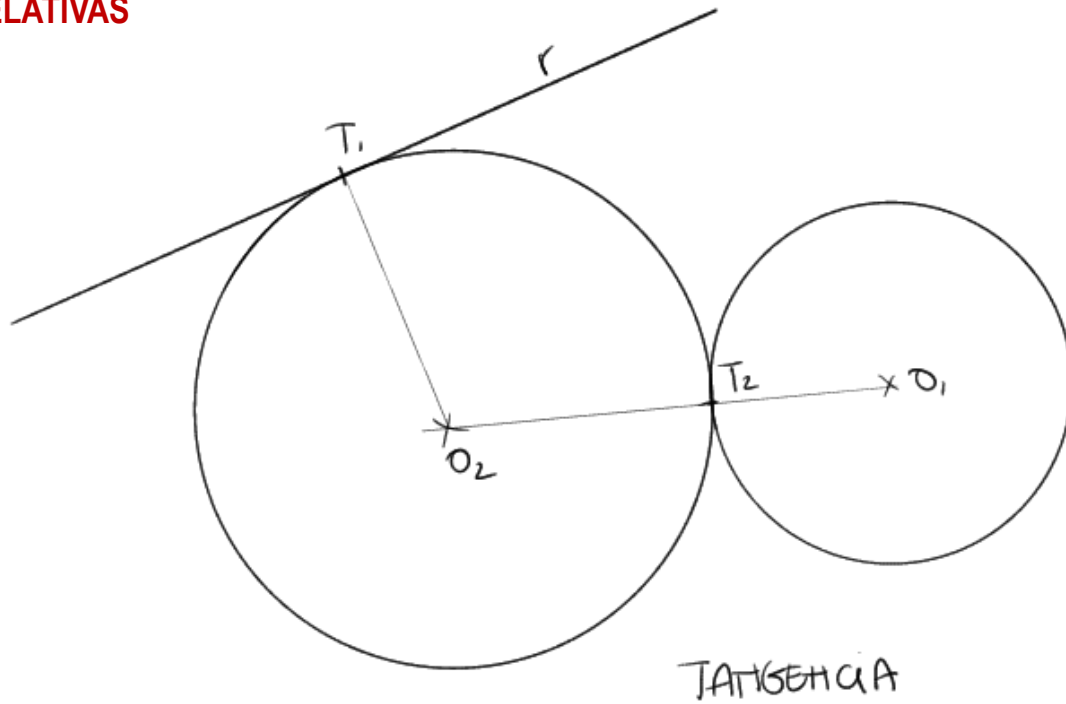
POSICIONES RELATIVAS

TANGENCIA

SECANTE

INTERIOR

EXTERIOR

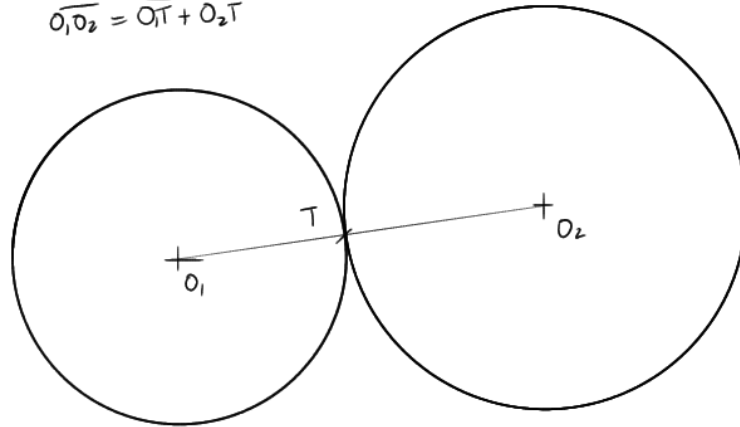


2. CONCEPTO DE TANGENCIAS

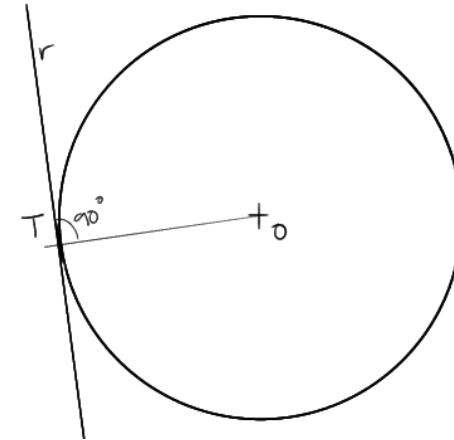
PROPIEDADES FUNDAMENTALES

PROPIEDAD 1

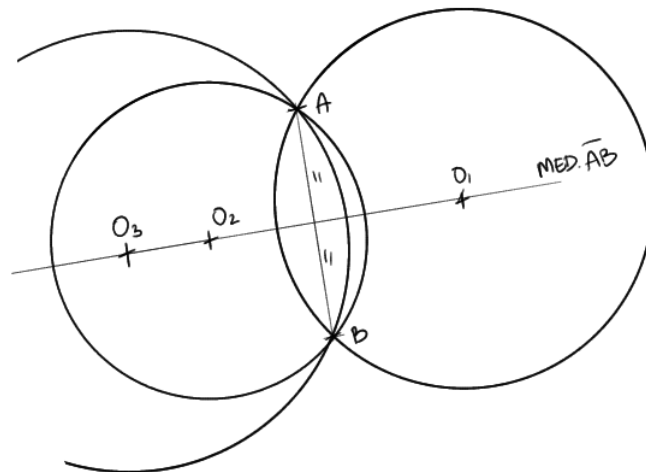
$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_1T} + \overline{O_2T}$$



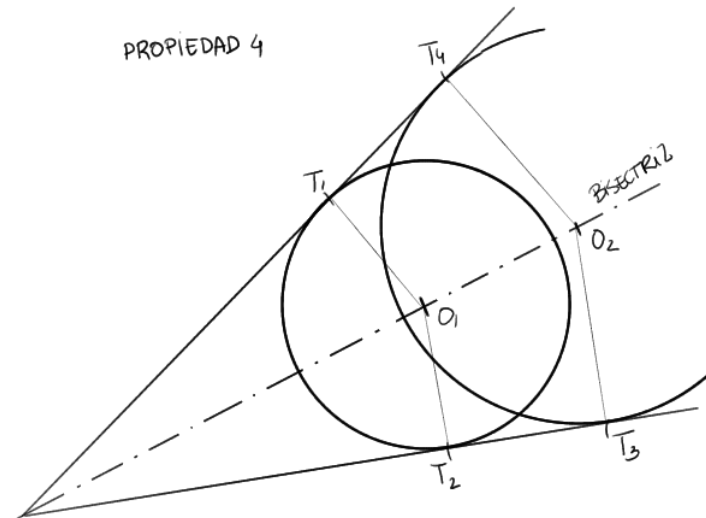
PROPIEDAD 2



PROPIEDAD 3



PROPIEDAD 4



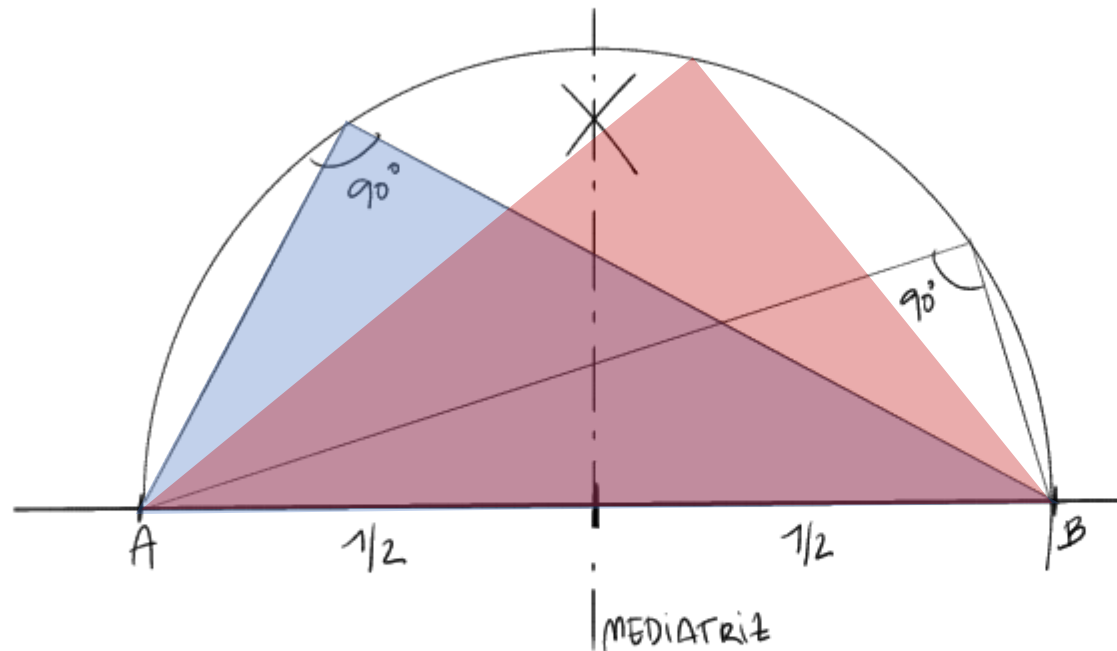
2. CONCEPTO DE TANGENCIAS

LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS



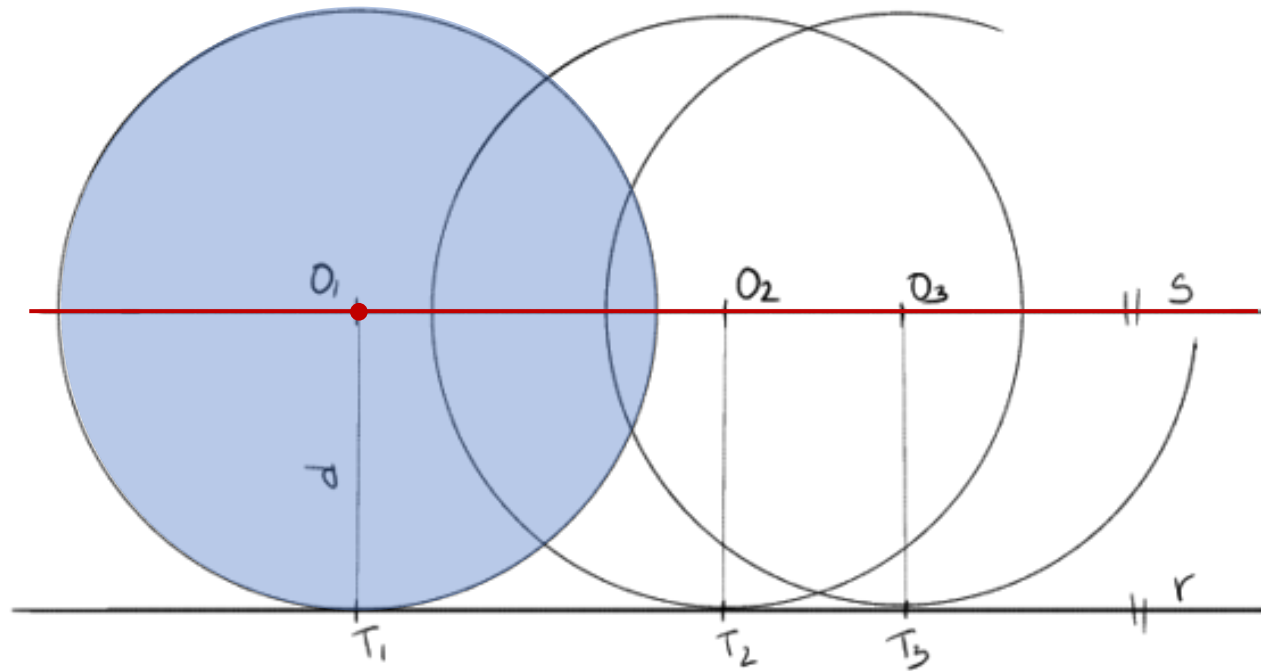
2. CONCEPTO DE TANGENCIAS

LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS



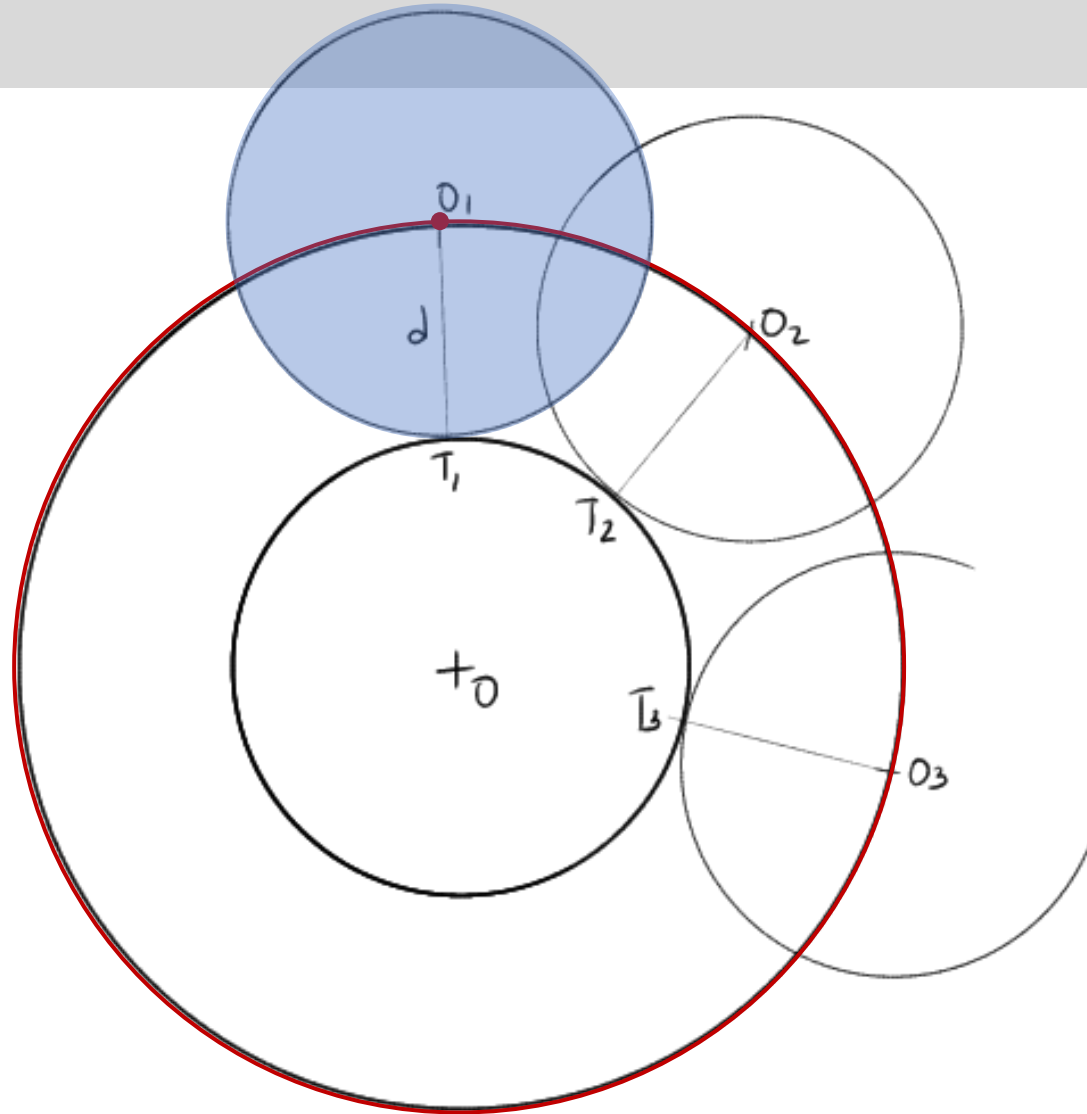
2. CONCEPTO DE TANGENCIAS

LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

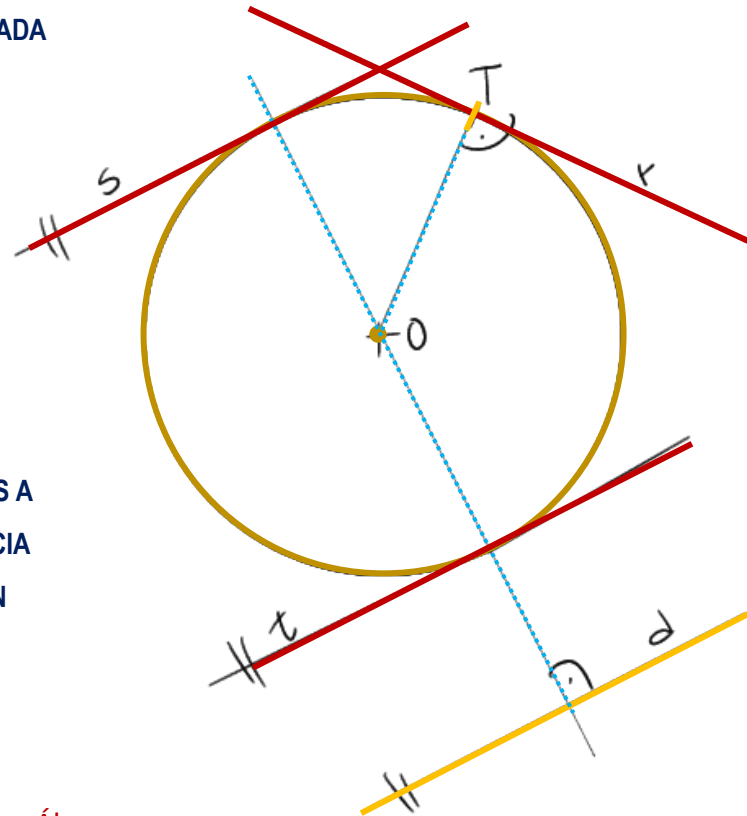
CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

TRAZADOS BÁSICOS

RECTA TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA DADA POR UN PUNTO T

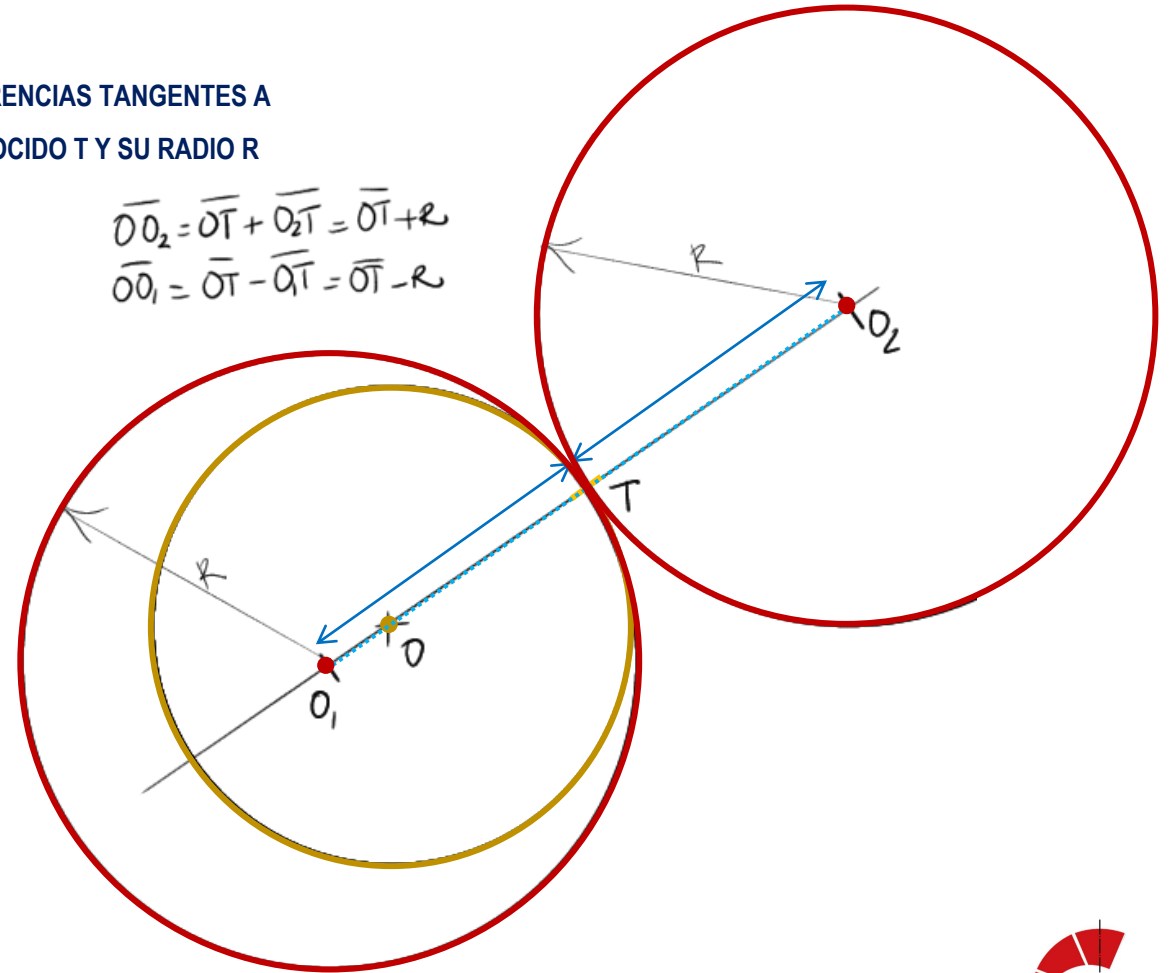


RECTAS TANGENTES A UNA CIRCUNFERENCIA DADA SU DIRECCIÓN

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A OTRA CONOCIDO T Y SU RADIO R

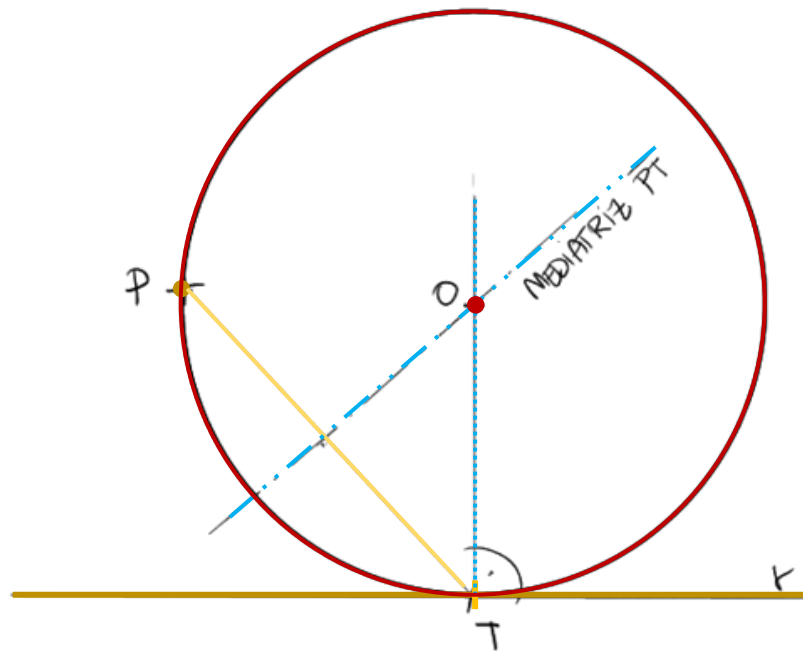
$$\vec{OO}_2 = \vec{OT} + \vec{O_2T} = \vec{OT} + R$$

$$\vec{OO}_1 = \vec{OT} - \vec{OT} = \vec{OT} - R$$

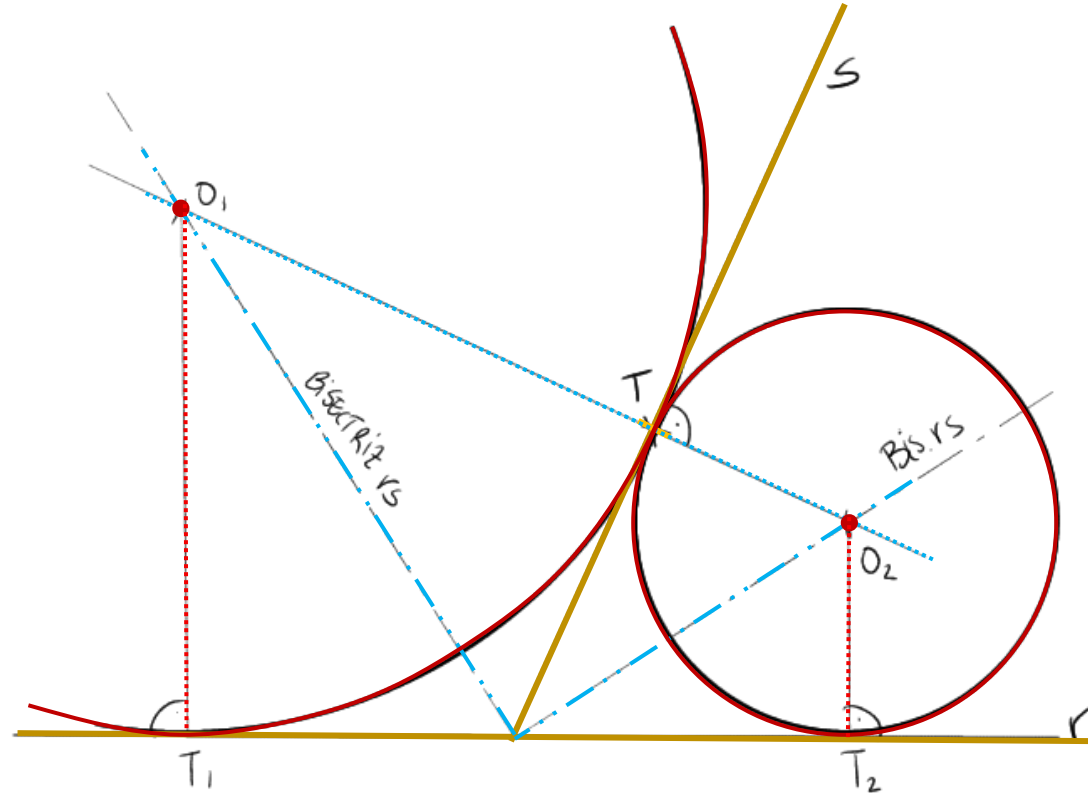


3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

TRAZADOS BÁSICOS CIRCUNFERENCIA TANGENTE A UNA RECTA
POR UN PUNTO T Y UN PUNTO P EXTERIOR



CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A
DOS RECTAS DADO EL PUNTO T



TEMA 38

3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

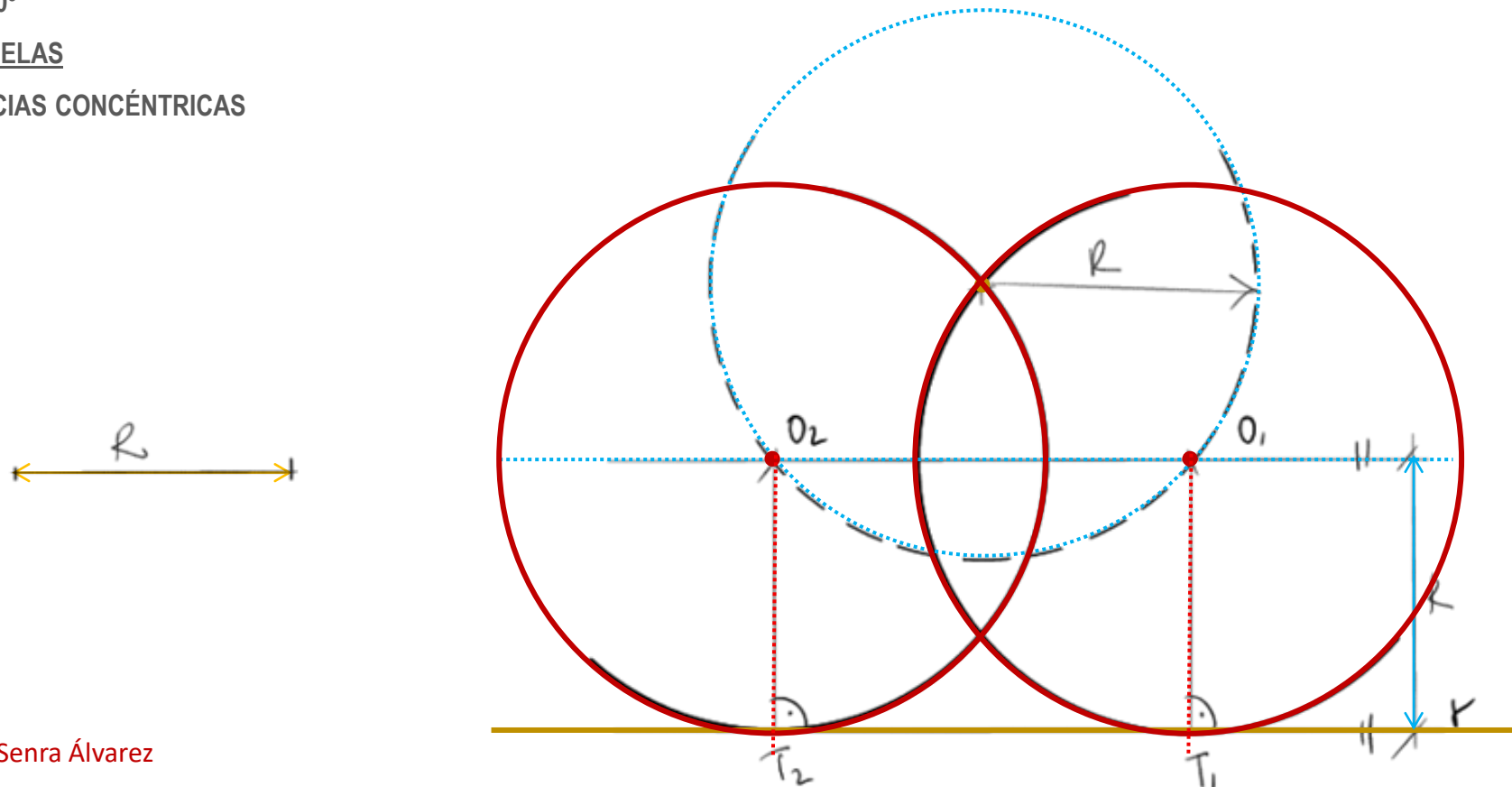
LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA CONOCIDO
SU RADIO Y PASANDO POR UN PUNTO EXTERIOR



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

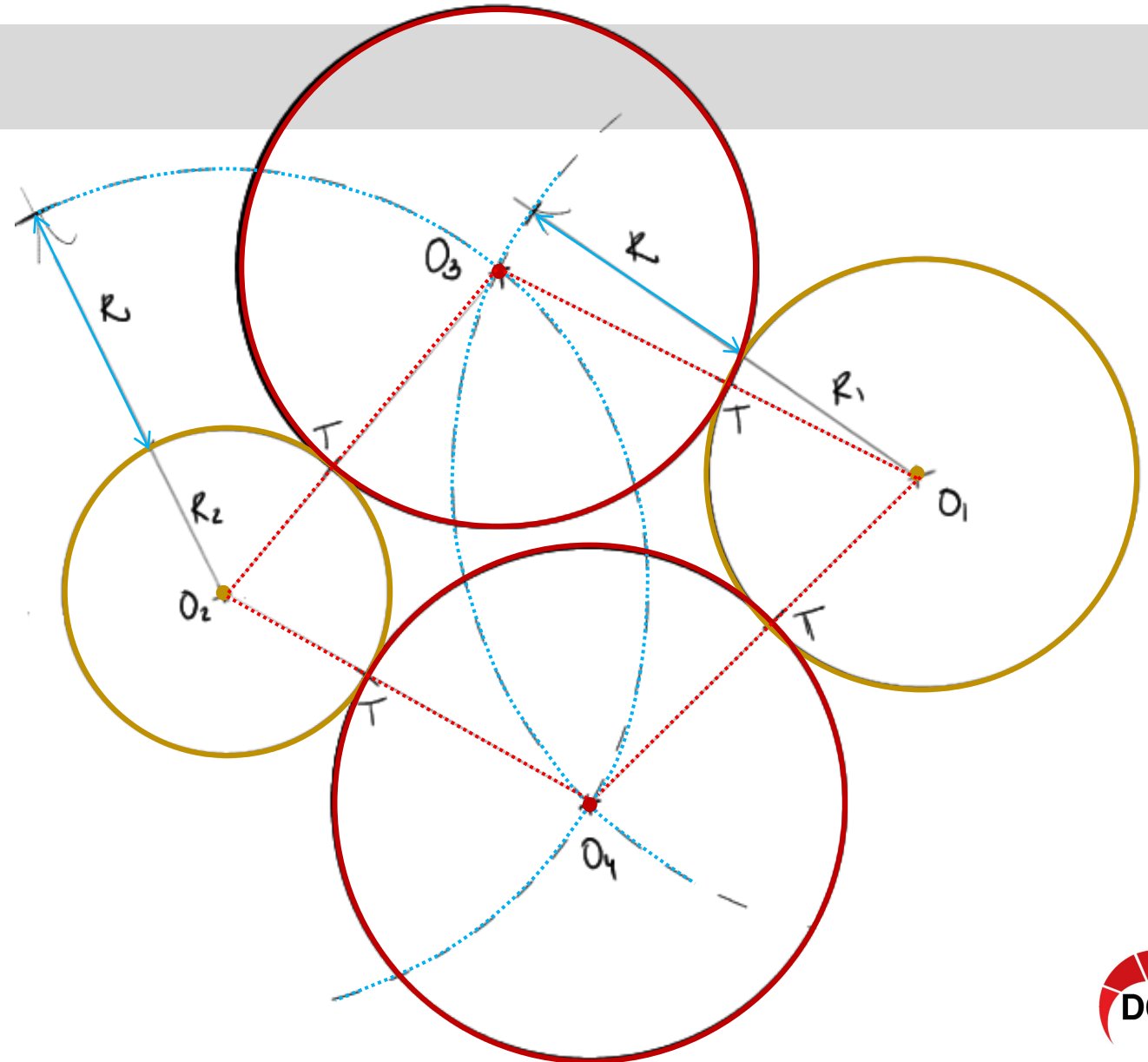
LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

CIRCUNFERENCIAS
TANGENTES A OTRAS DOS
CONOCIDO SU RADIO



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

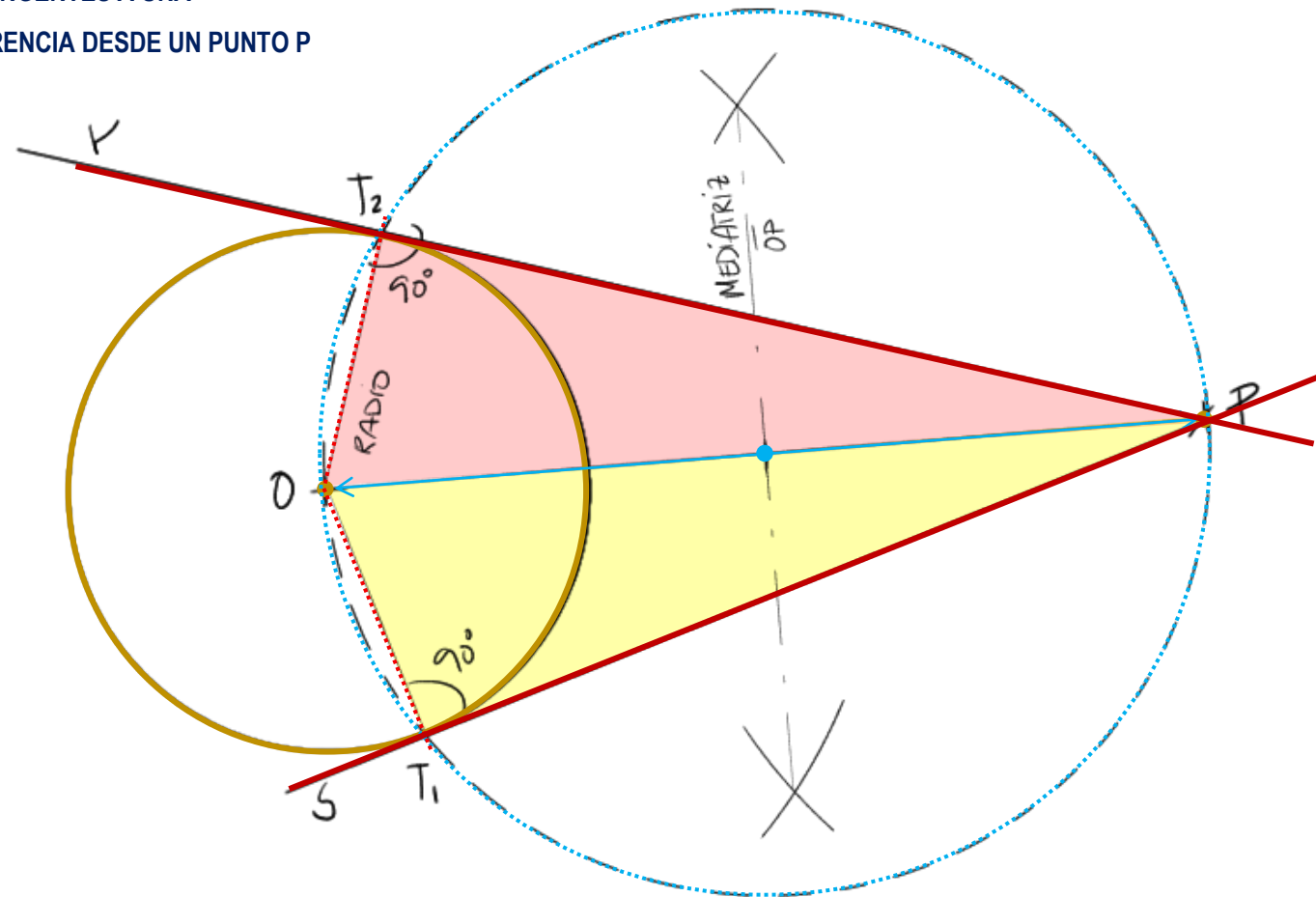
LUGARES GEOMÉTRICOS

ARCO CAPAZ 90°

RECTAS PARALELAS

CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

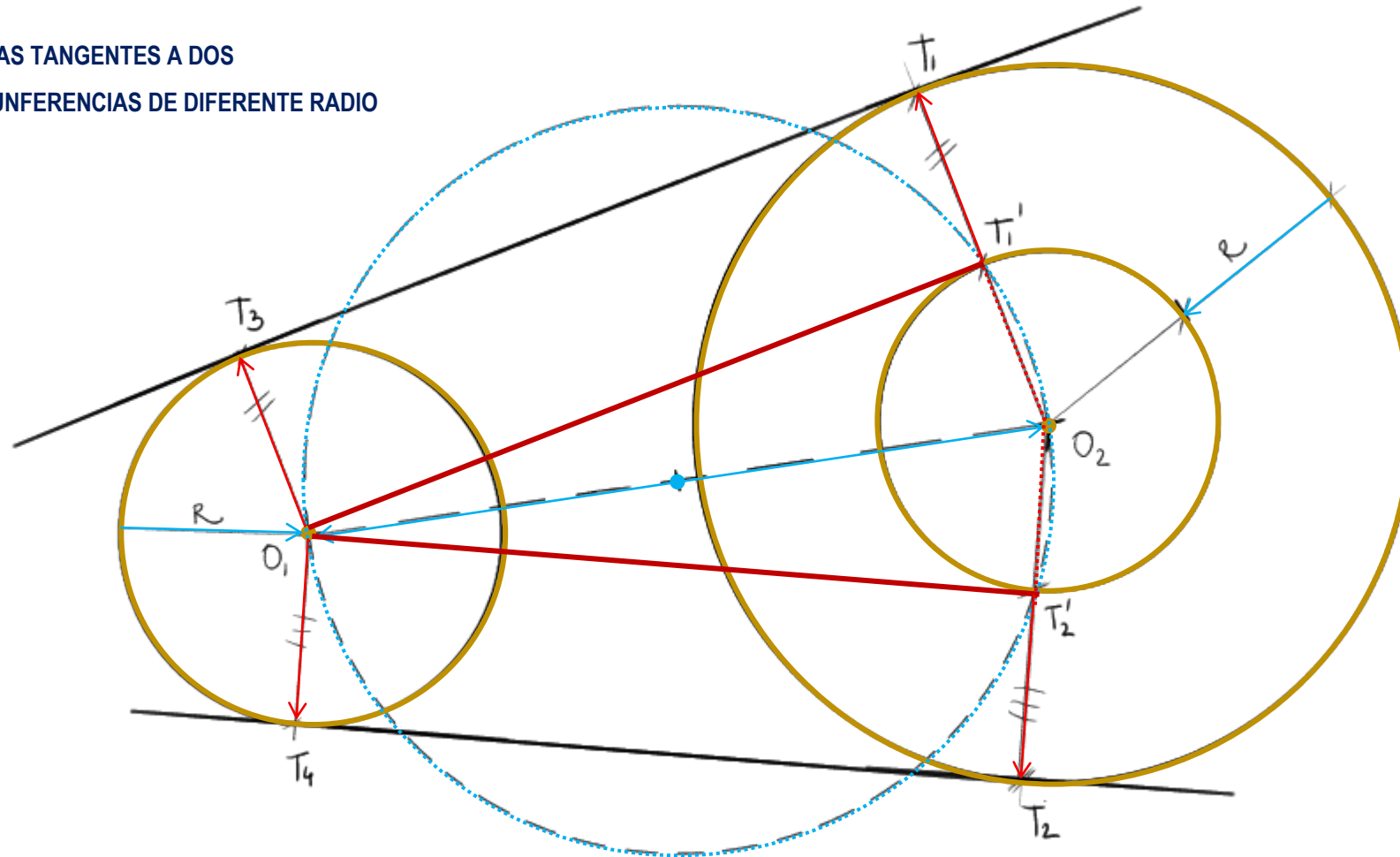
RECTAS TANGENTES A UNA
CIRCUNFERENCIA DESDE UN PUNTO P



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

DILATACIONES

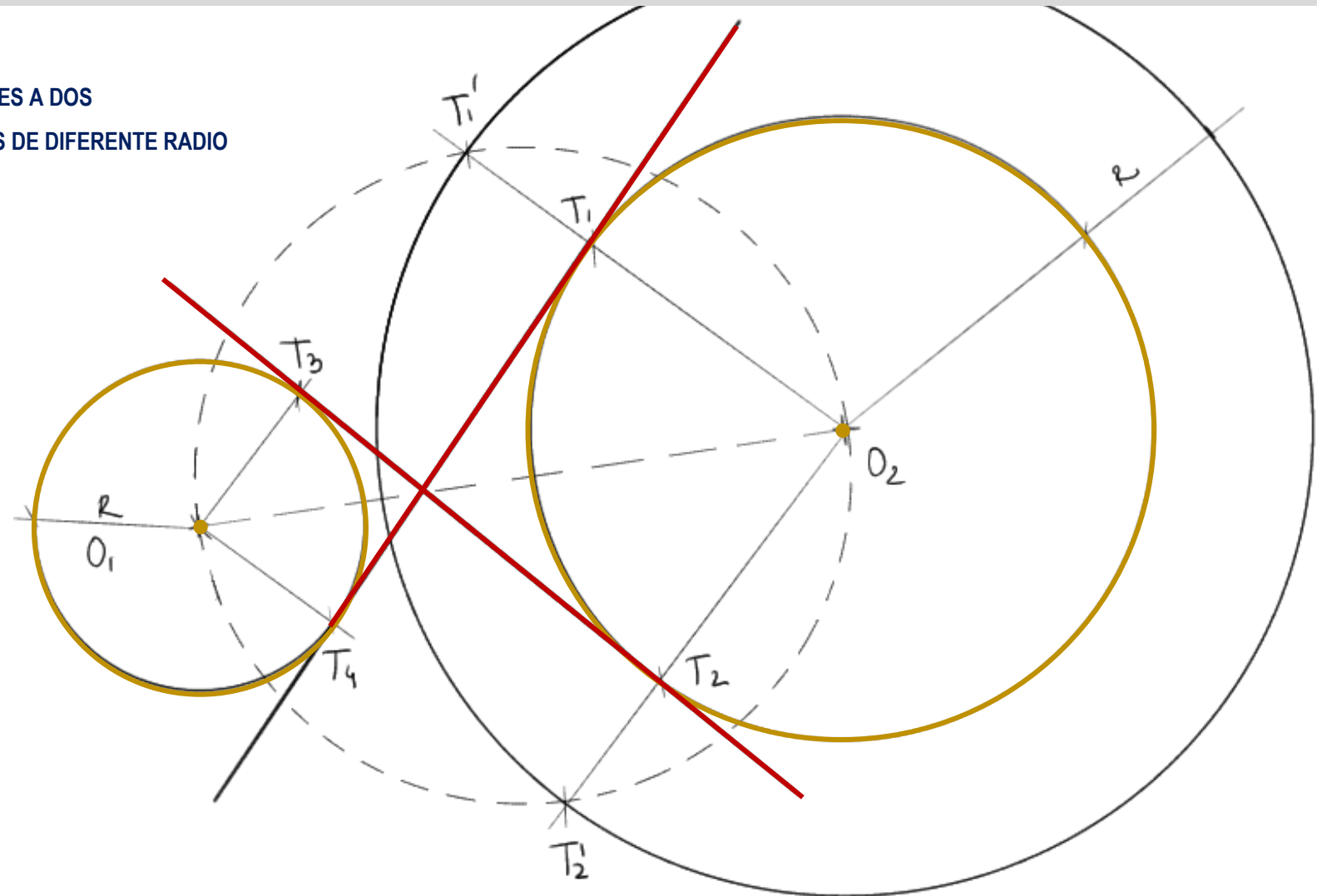
RECTAS TANGENTES A DOS
CIRCUNFERENCIAS DE DIFERENTE RADIO



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

DILATACIONES

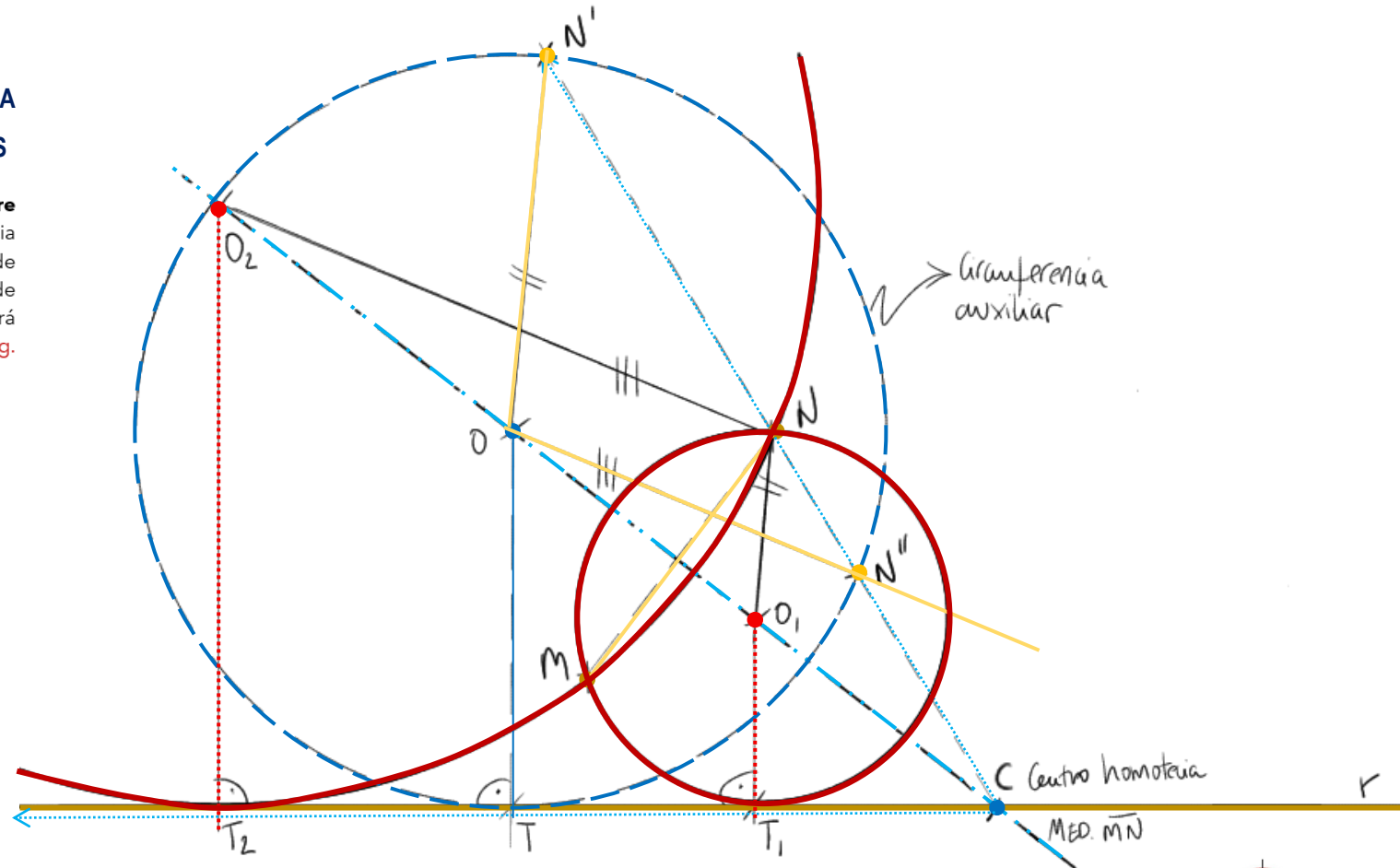
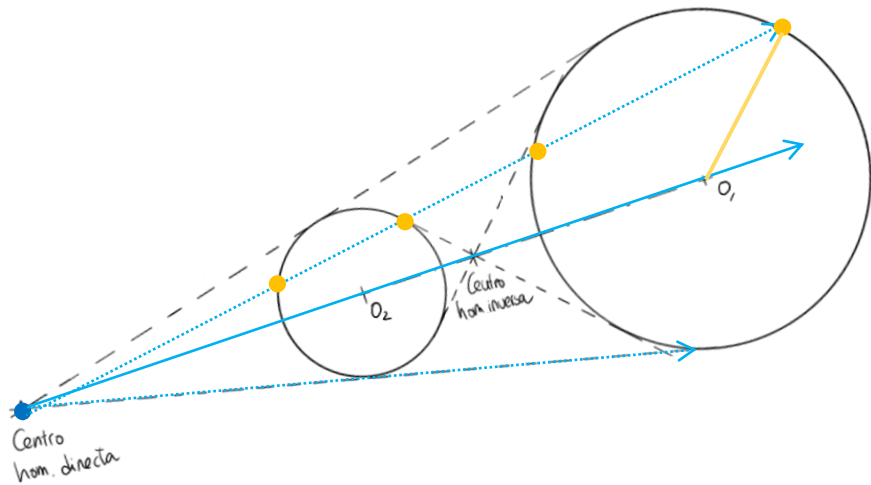
RECTAS TANGENTES A DOS
CIRCUNFERENCIAS DE DIFERENTE RADIO



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

POR HOMOTECIA CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES

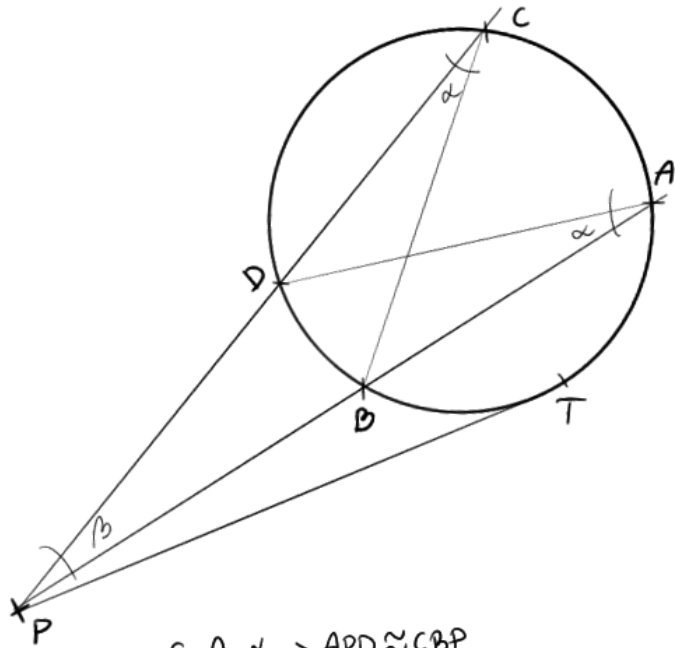
Y por último aclararemos que **dos circunferencias cualesquiera serán siempre homotéticas entre sí**, algo que resultará relevante a la hora de utilizar la homotecia como herramienta para resolver algunos problemas de tangencias. El centro de homotecia entre dos circunferencias está alineado con sus centros y el punto de intersección de sus tangentes comunes. En el caso de las tangentes exteriores se tratará de una homotecia directa y con las tangentes interiores de una homotecia inversa (Fig. 5).



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

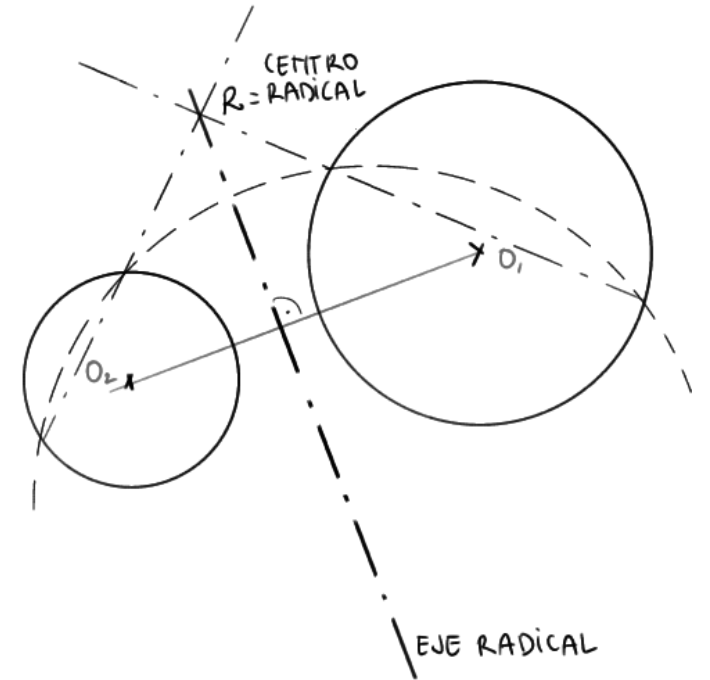
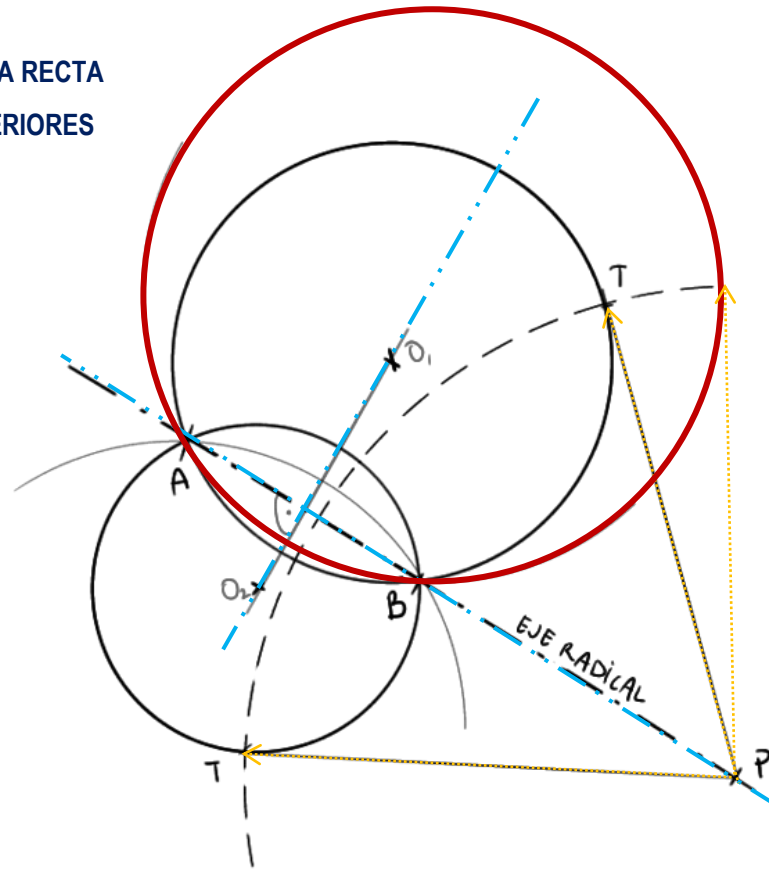
POR POTENCIA

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA
Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES



$$C = A = \alpha \rightarrow APD \sim CBP$$

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC} = \overline{PT} \cdot \overline{PT}$$

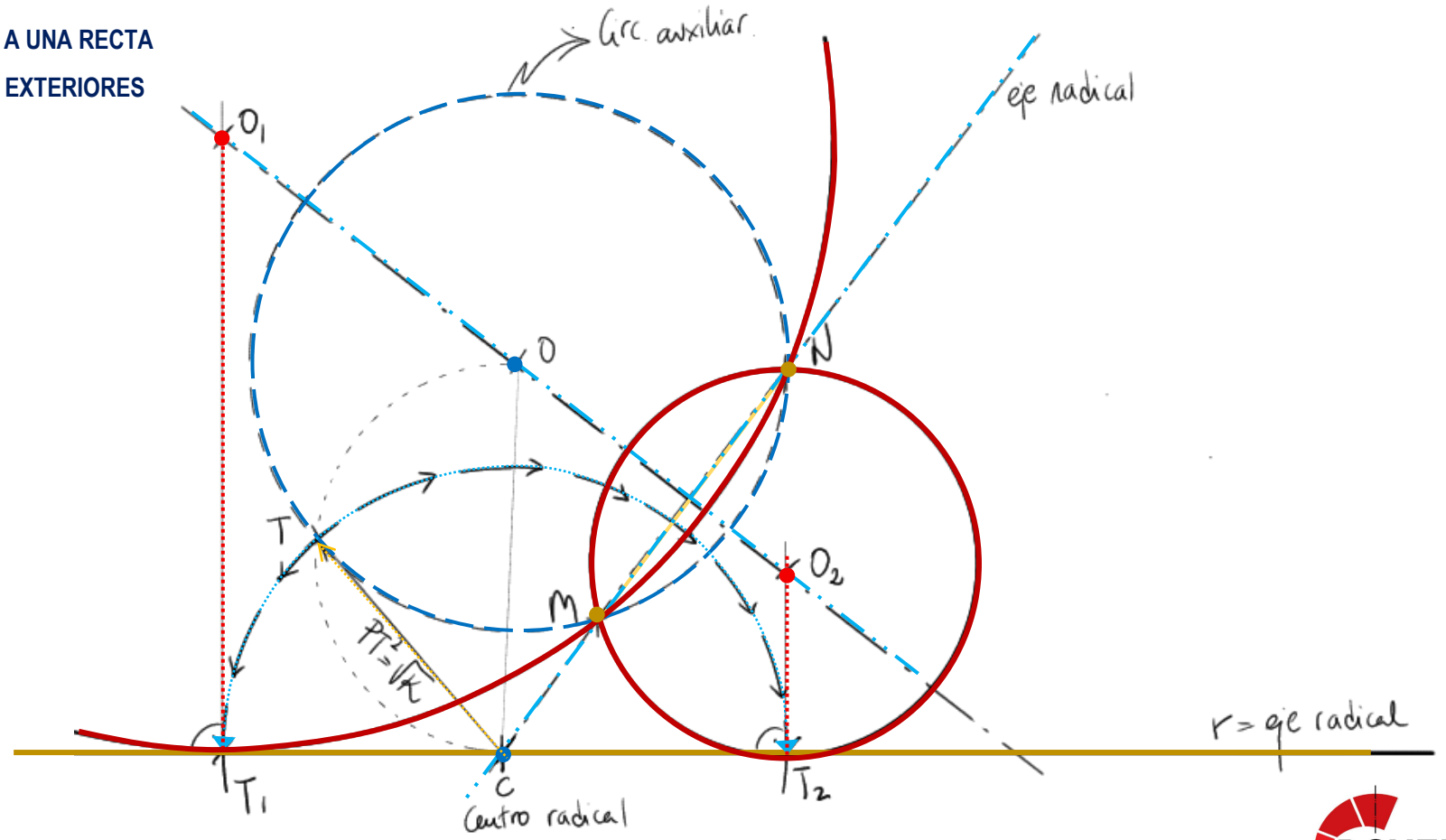
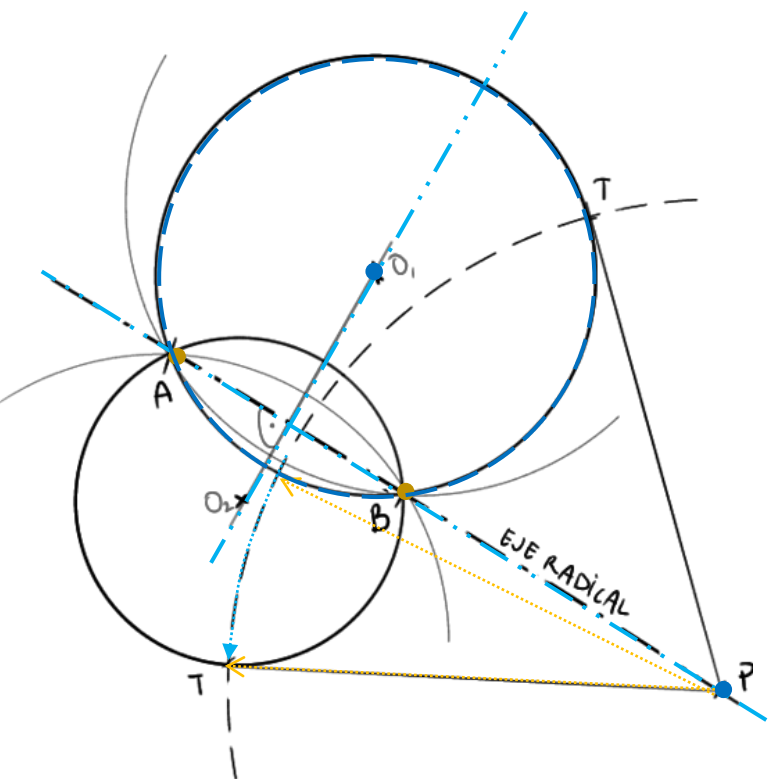


TEMA 38

3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

POR POTENCIA

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA
Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES



AUTORA _ Iria Senra Álvarez

3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

POR INVERSIÓN

CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES

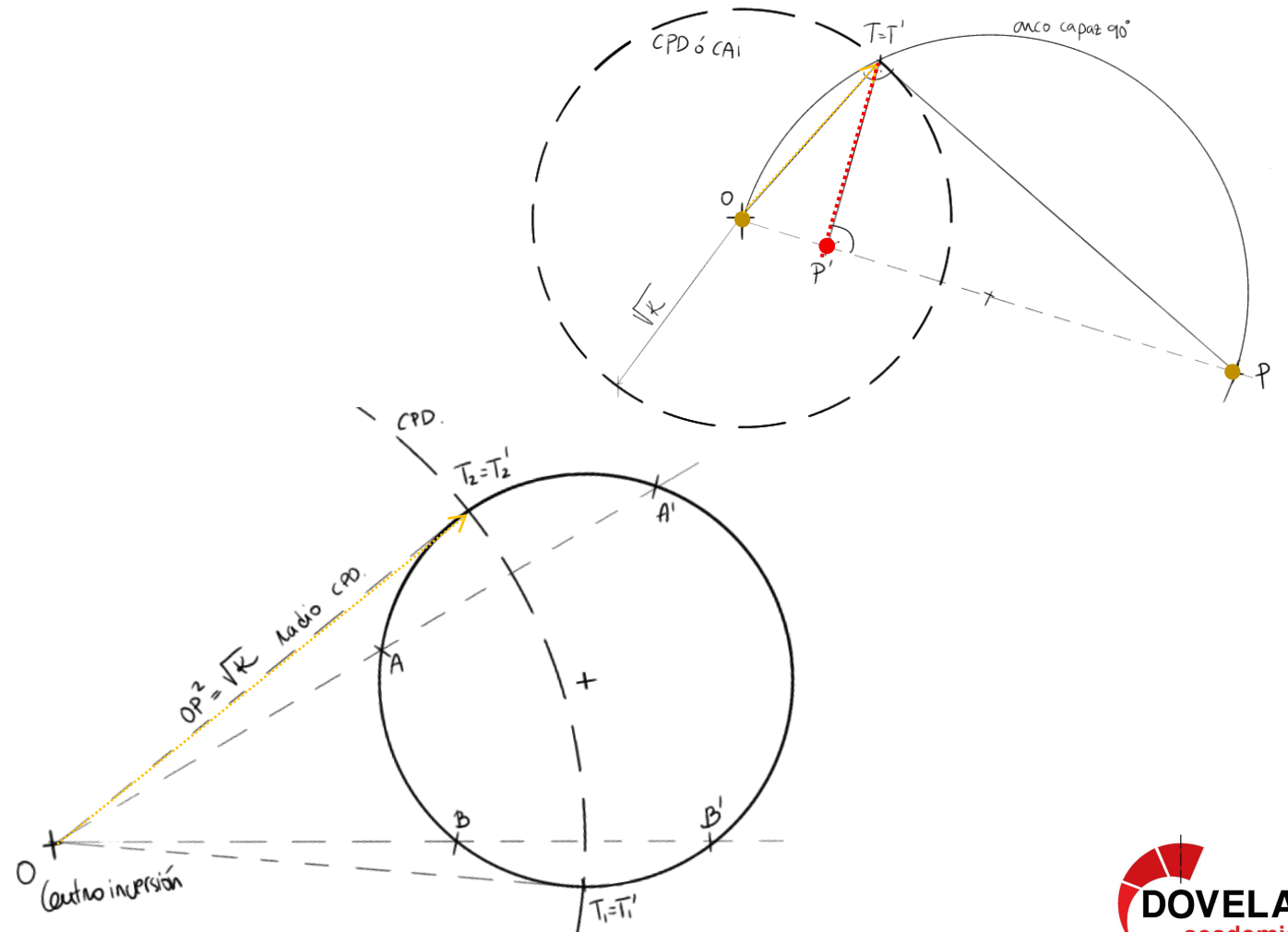
5.3. INVERSIÓN

Y la última transformación anamorfa es **la inversión**. (Fig. 12) Se dice que dos puntos son inversos si se cumplen dos requisitos:

- Están alineados con punto fijo que llamamos **centro u origen de inversión** O.
- Y además la distancia entre cualquier par de puntos inversos a ese centro mantiene una relación constante que se expresa $OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC' = \dots$ K cifra a la que llamamos **razón de inversión**.

Observamos que esta definición tiene una clara relación con la definición de potencia de una circunferencia respecto de un punto por lo cual podemos deducir que los pares de puntos inversos, siempre y cuando no estén alineados, determinan una circunferencia. Es decir, **son concíclicos**

Los puntos tangencia T desde el centro O a esta circunferencia son **puntos dobles** ya que T coincide con su inverso T' y la distancia desde el centro a estos puntos es igual a la \sqrt{K} ya que ha de cumplirse que $OT \times OT' = K$ y T es un punto doble, entonces $OT^2 = K$.



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

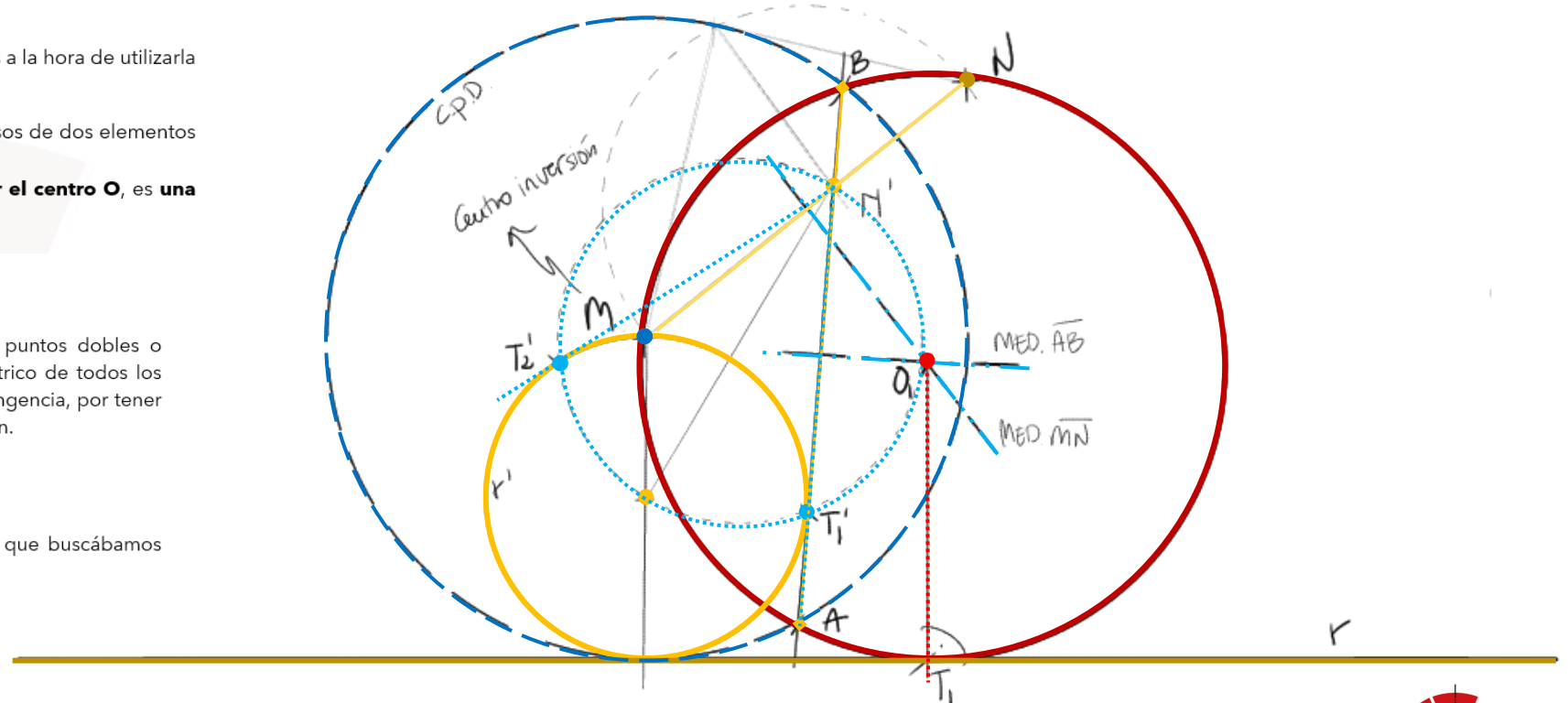
POR INVERSIÓN CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES

Hay dos propiedades de esta transformación que resultarán básicos a la hora de utilizarla para resolver problemas de tangencias:

- La primera es que la **tangencia se conserva**, es decir, los inversos de dos elementos tangentes son también tangentes entre sí.
- Y la segunda es que **la inversa de una recta que no pasa por el centro O , es una circunferencia que sí pasa por el centro.**

El método consiste siempre en seguir los **mismos pasos**:

- Primero definir un centro de inversión y una circunferencia de puntos dobles o autoinversión conveniente. Esta circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que son inversos de sí mismos, que serán los puntos de tangencia, por tener que cumplirse $PT \times PT' = PT^2 = K$ y su centro es el centro de inversión.
- Luego hallar los inversos de todos los elementos.
- Para a continuación trazar las tangentes a los inversos.
- Y por último hallar los inversos de esas tangentes que serán las que buscábamos sobre los elementos generales



3. TRAZADOS DE TANGENCIAS

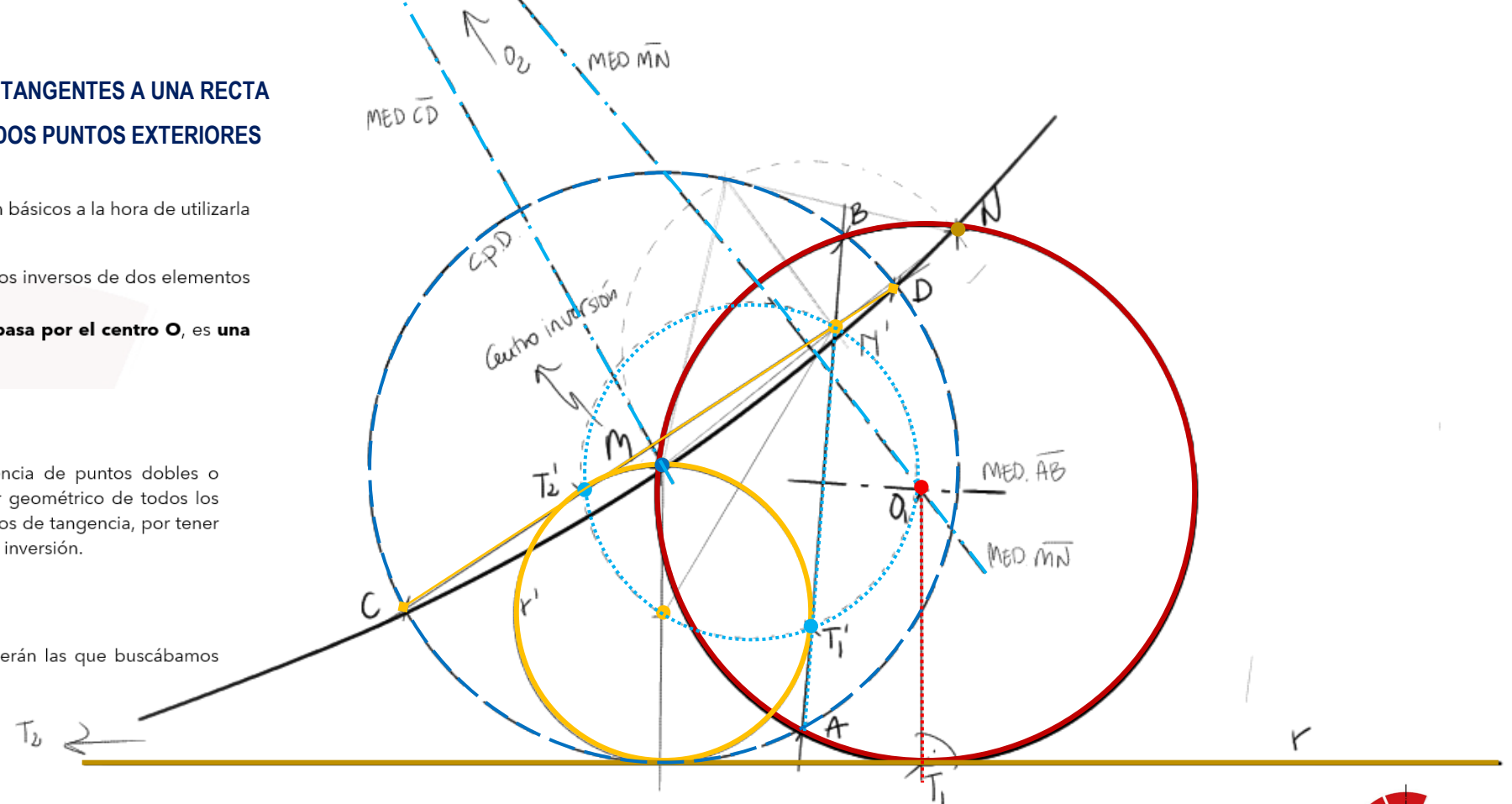
POR INVERSIÓN CIRCUNFERENCIAS TANGENTES A UNA RECTA Y QUE PASEN POR DOS PUNTOS EXTERIORES

Hay dos propiedades de esta transformación que resultarán básicos a la hora de utilizarla para resolver problemas de tangencias:

- La primera es que la **tangencia se conserva**, es decir, los inversos de dos elementos tangentes son también tangentes entre sí.
- Y la segunda es que **la inversa de una recta que no pasa por el centro O, es una circunferencia que si pasa por el centro.**

El método consiste siempre en seguir los **mismos pasos**:

- Primero definir un centro de inversión y una circunferencia de puntos dobles o autoinversión conveniente. Esta circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que son inversos de sí mismos, que serán los puntos de tangencia, por tener que cumplirse $PT \times PT' = PT^2 = K$ y su centro es el centro de inversión.
- Luego hallar los inversos de todos los elementos.
- Para a continuación trazar las tangentes a los inversos.
- Y por último hallar los inversos de esas tangentes que serán las que buscábamos sobre los elementos generales



4. LOS 10 CASOS DE APOLONIO

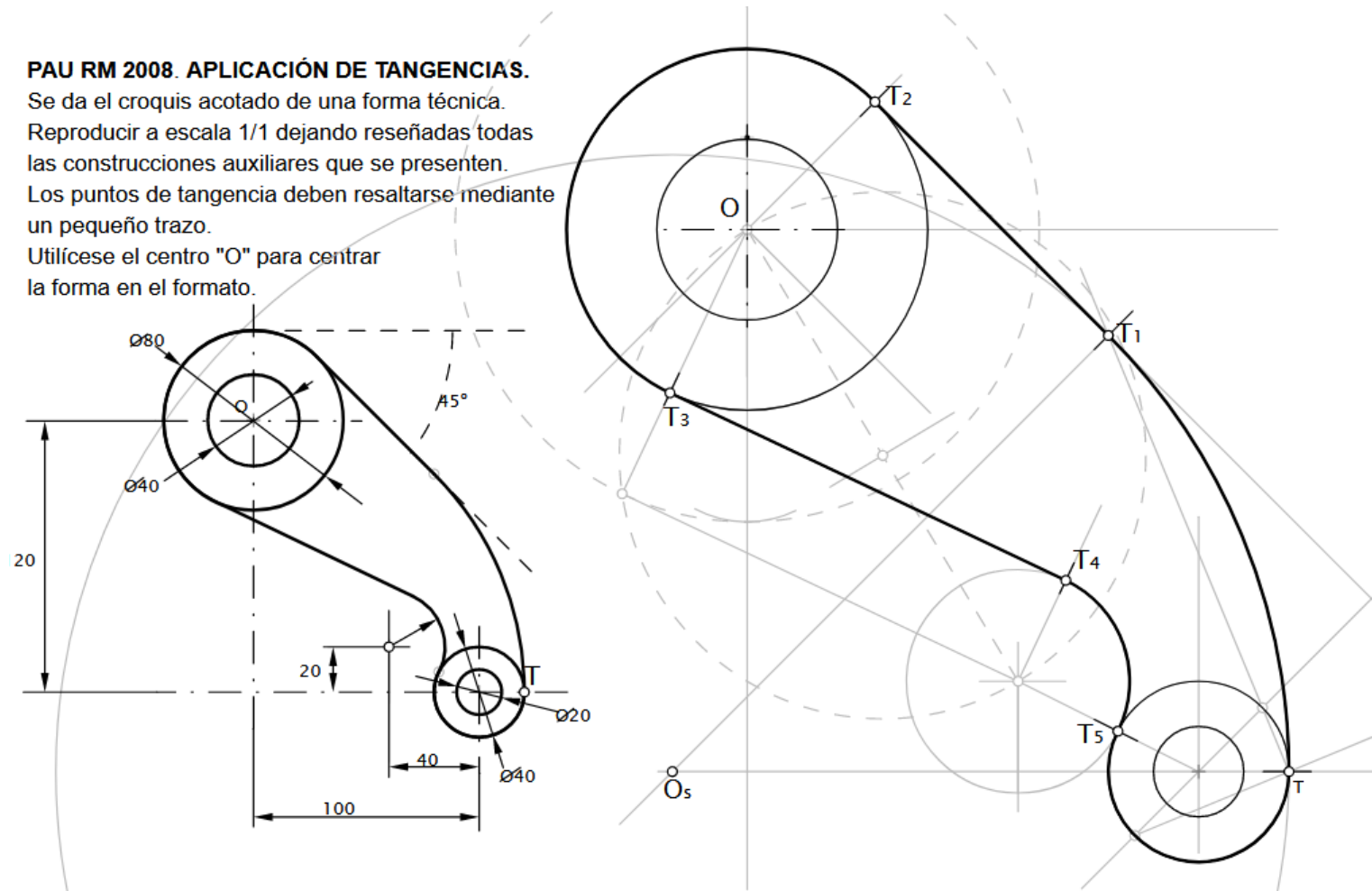
“Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto (P), una recta (R) o una circunferencia (C) , dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados”

- Tres puntos **PPP**
- Tres rectas **RRR**
- Dos puntos y una recta **PPR**
- Dos rectas y un punto **RRP**
- Dos puntos y una circunferencia **PPC**
- Dos circunferencias y un punto **CCP**
- Dos rectas y una circunferencia **RRC**
- Dos circunferencias y una recta **CCR**
- Un punto, una recta y una circunferencia **PRC**
- Tres circunferencias **CCC**

5. ENLACES Y APLICACIONES

PAU RM 2008. APLICACIÓN DE TANGENCIAS.

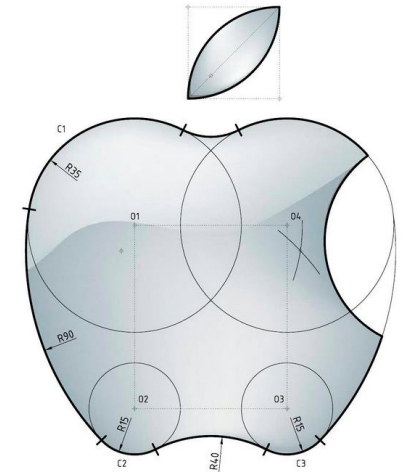
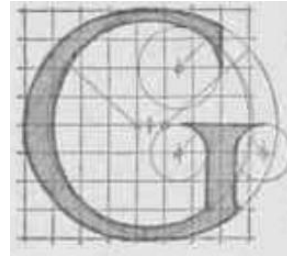
Se da el croquis acotado de una forma técnica.
Reproducir a escala 1/1 dejando reseñadas todas
las construcciones auxiliares que se presenten.
Los puntos de tangencia deben resaltarse mediante
un pequeño trazo.
Utilícese el centro "O" para centrar
la forma en el formato.



5. ENLACES Y APLICACIONES



ABCDEFGHIJ
KLMNOPQRS
TUVWXYZ
abcdefghijkl
klmnopqrs
tuvwxyz



AUTORA _ Iria Senra Álvarez

6. CONCLUSIÓN

- **RELEVANCIA PARA NUESTRO ALUMNADO DEL CONOCIMIENTO SOBRE LA GEOMETRIA PLANA** **CIENCIA + ARTE**

- **RELACION CON EL CURRÍCULO**
ESO DE MANERA INTUITIVA – BACHILLERATO MÁS TÉCNICO Y PROFESIONAL
IMPORTANCIA DE ESE PRIMER ACERCAMIENTO INTUITIVO PARA PODER TRABAJARLO DE MANERA MÁS TÉCNICA EN CURSOS SUPERIORES

- **CÓMO ENSEÑAMOS?** **IMPORTANCIA DEL DIBUJO EN CLASE**